Evaluation du nombre de combinaisons desquelles les 28 dés d'un jeu du Domino sont susceptibles d'après la règle de ce jeu.

(*par feu Dr.* M. Reiss *à Francfort.*)

Le jeu du Domino comprend sept éléments qui se combinent à deux dans les différents dés, et en constituent les deux parties. La règle du jeu exige que deux dés consécutifs se touchent par des parties équivalentes. De là on conclut que l'élément initial est le même que l'élément final; c'est-à-dire, que la partie extérieure du premier dé et celle du dernier sont équivalentes. En effet, une combinaison des 28 dés étant conforme à la règle, elle ne cessera pas de l'être, lorsqu'on en écarte les dés doubles. Cette réduction faite, chaque élément fera partie de six dés, puisqu'il est combiné successivement avec chacun des six autres; par conséquent, l'élément initial doit se rencontrer encore en cinq autres endroits de la combinaison. Or, dans l'intérieur de celle-ci, chaque élément se présente toujours deux fois de suite; d'abord comme seconde partie d'un dé, puis comme première partie du dé suivant; l'élément initial ne pourra donc s'y rencontrer que quatre fois, et devra finalement se trouver à un endroit où il ne soit pas suivi de lui-même, c'est-à-dire, à l'autre extrémité de la combinaison.

L'identité des éléments extrêmes nous fait voir qu'une combinaison de laquelle les dés doubles sont exclus, étant repliée sur elle-même de manière à ce que les dés extrêmes viennent se toucher par leurs parties extérieures, tous les éléments s'y présenteront partout deux fois de suite, comme parties contigues de deux dés consécutifs; ce qui par conséquent, aura lieu à trois différentes reprises. Des combinaisons repliées de la façon décrite, soit que l'on en ait exclu les dés doubles, soit qu'on les y admette, seront nommées circulaires, tandis que les combinaisons non repliées seront comprises sous le nom de rectilignes. Les combinaisons circulaires ne possèdent pas de dés extrèmes; on y peut, au contraire, considérer chaque dé comme initial. La direction suivant laquelle les dés y sont censés se succéder doit être fixée préalablement de même que celle des combinaisons rectilignes; nous la supposerons la même dans tous les cas.

Étant proposée une combinaison circulaire de laquelle les dés doubles sont exclus, on peut, d'après ce que nous venons de dire, y intercaler chaque dé double en trois différents endroits, il y a donc 3^7 manières différentes de combiner entre elles les intercalations des sept dés doubles. En d'autres termes, de chaque combinaison circulaire de laquelle les dés doubles sont exclus, il en résultera 3^7 autres dans lesquelles ces dés sont admis. Si donc on désigne par S le nombre de toutes les combinaisons de la première espèce, celui des combinaisons de la seconde sera $=3^7 \cdot S$.

Si dans une combinaison circulaire de la seconde espèce on considère successivement comme initial chacun des 28 dés qu'elle comprend, il en résultera 28 combinaisons rectilignes; d'où l'on conclut sans difficulté que le nombre total de ces dernières équivaut à $28 \cdot 3^7 \cdot S$. La question se trouve donc réduite à trouver le nombre S, quantité que nous allons maintenant définir d'une manière plus simple et dégagée en même temps de toute considération accessoire.

2.

Nous représenterons les dés par des ambes composés des mêmes éléments, et nous désignerons ceux-ci par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. De cette manière les combinaisons circulaires des dés desquelles les dés doubles sont exclus, se trouveront remplacées par des combinaisons ou suites d'ambes également circulaires. Ces suites se composeront des 21 ambes à éléments inégaux que l'on peut former avec les sept éléments 1, 2,..., ambes qui s'y succéderont dans le même ordre et suivant la même direction que les dés dans les combinaisons respectives, et qui seront ordonnées de manière que le second élément de chaque ambe soit le même que le premier de l'ambe suivant. Le nombre de toutes les suites satisfaisant à ces conditions ne sera donc autre que S.

Si relativement à une quelconque de ces suites circulaires d'ambes, on écrit circulairement, et d'après leur ordre les premiers éléments de tous les ambes qu'elle renferme, il en résultera une suite circulaire d'éléments à l'égard de laquelle on peut remarquer:

1.° qu'elle comprend tous les sept éléments, et chacun trois fois. En effet, dans la suite circulaire d'ambes qui a servi à la former, chaque élément qui y entre, c'est-à-dire chacun des sept éléments, se présente trois fois comme second élément d'un ambe, et trois fois comme premier élément de l'ambe suivant. Il doit donc aussi se rencontrer trois fois dans la suite circulaire composée des premiers éléments de tous les ambes.

2.° qu'on retrouvera la suite circulaire d'ambes, si dans la suite circulaire d'éléments qui en est dérivée, on considère comme un ambe chaque groupe de deux éléments consécutifs pris dans l'ordre qu'ils y occupent, et qu'on range ces ambes circulairement, en les faisant se succéder conformément à leur ordre. En effet, si a, b, c,... sont des éléments consécutifs de la suite circulaire d'éléments, a et b seront les éléments initiaux de deux ambes consécutifs de la suite circulaire d'ambes de laquelle elle est dérivée. Or le premier élément du second de ces ambes est en même temps le second élément du premier, qui sera par conséquent ab. De même, l'ambe consécutif à ab sera bc, et ainsi de suite.

D'après la seconde remarque les suites circulaires d'ambes et d'éléments se correspondent réciproquement une à une; par conséquent, le nombre des suites de la seconde espèce sera le même que celui des suites de la première, c'ést-à-dire, $=S$. On peut donc définir cette quantité comme étant le nombre de toutes ces suites circulaires d'éléments; ce qui nous permet de donner l'énoncé suivant à la question à résoudre:

« On demande le nombre S de toutes le suites circulaires que l'on peut « former avec les sept éléments 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, trois fois répétés, et « disposés en sorte que les 21 groupes de deux éléments consécutifs que « chacune en contient, présentent les 21 ambes à éléments inegaux que « l'on peut former avec les mêmes éléments 1, 2,... »

Comme on le voit, nous entendons ici par « ambes » des combinaisons des éléments à deux, sans égard à l'ordre dans lequel ils s'y suivent; ainsi, en parlant p. e. de l'ambe 12, il restera indécis, à moins de le dire explicitement, si on le prend dans ce sens ou en sens inverse (21).

3.

Idée générale de la méthode de solution.

Si d'une de ces suites circulaires d'éléments on efface, partout où ils se trouvent, les éléments 4, 5, 6, 7, et que l'on ne change rien à l'ordre des éléments non effacés, ceux-ci formeront eux-mêmes une suite circulaire assujétie aux conditions de se composer des éléments 1, 2, 3, trois fois répétés, et de renfermer (au moins une fois) chacune des ambes 12, 13, 23, sous la forme de groupes de deux éléments consécutifs. La première de ces conditions est évidente en elle-même, la seconde ne le sera pas moins si l'on fait attention qu'il y a dans la suite primitive trois groupes d'éléments consécutifs, formant respectivement des ambes 12, 13, 23, et que ces groupes ne seront pas dénaturés, lorsqu'on écarte les éléments 4, 5, 6, 7 de la suite.

Si l'on commence par former toutes les suites circulaires soumises aux deux conditions que nous venons de signaler, et que l'on intercale ensuite dans chacune de ces suites auxiliaires les éléments 4, 5, 6, 7, trois fois répétés, exécutant cette opération de toutes les manières propres à satisfaire aux conditions de la question et à produire des suites différentes les unes des autres, on trouvera nécessairement le tableau complet des suites circulaires desquelles il s'agit de déterminer le nombre. C'est en partant de ce point de vue que nous allons maintenant résoudre la question proposée.

SOLUTION.

4.

Première partie. — Enumération des suites auxiliaires.

La méthode que nous venons d'esquisser, exige en premier lieu que l'on forme le tableau des suites auxiliaires. Dans ce but, nous déterminerons préalablement les suites circulaires soumises à la seule condition de se composer des éléments 1, 2, 3, trois fois répétés. Afin de distinguer les uns des autres les trois éléments 1 que contient une telle suite, nous en nommerons un quelconque le premier, et nous en comprendrons les deux autres sous le nom de second ou de troisiéme, selon qu'ils en suivent le premier de plus près ou de plus loin, d'après la direction convenue. Nous désignerons aussi à l'égard d'une quelconque de ces suites circulaires

$$\left.\begin{array}{l}\text{par } A\\ \text{par } B\\ \text{par } C\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{le nombre}\\ \text{d'éléments}\\ \text{contenus}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{entre le premier et le second } 1\\ \text{entre le seconde et le troisième } 1\\ \text{entre le troisième et le premier } 1\end{array}\right.$$

et nous représenterons par (A, B, C) le groupe de toutes les suites qui s'accordent sous le rapport des valeurs de A, B et C, quantités dont la somme est généralement $=6$.

Pour déterminer les suites desquelles se compose le groupe (A, B, C), nous les supposerons écrites sous forme rectiligne, en commençant chaque suite par son premier 1, et en y conservant l'ordre des éléments. En faisant abstraction dans ces suites rectilignes des éléments 1, les autres éléments présenteront des permutations de 2 et 3, trois fois répétés. Or, le tableau de toutes les permutations de ce genre étant celui-ci:

$$\left.\begin{array}{ll}222333 & 322233\\ 223233 & 322323\\ 223323 & 322332\\ 223332 & 323223\\ 232233 & 323232\\ 232323 & 323322\\ 232332 & 332223\\ 233223 & 332232\\ 233232 & 332322\\ 233322 & 333222\end{array}\right\} \qquad (1)$$

ajoutons y l'élément 1 avant le premier, après le $A^{\text{ième}}$, et après le $(A+B)^{\text{ième}}$ élément de chaque permutation, et désignons par $[A, B, C]$ le groupe de suites rectilignes qui en résultent. Si maintenant on écrit ces dernières sous forme circulaire, en y faisant figurer comme premiers 1 les 1 initiaux des suites rectilignes, les suites circulaires que l'on obtient par là, ne seront autres que celles du groupe (A, B, C), qui se composera, par conséquent, de ces 20 suites, si toutefois dans le nombre de ces dernières aucune ne se rencontre plus d'une fois. Pour juger de cette circonstance, remarquons que deux suites circulaires, quelle que soit du reste leur origine, étant égales entre elles, et contenant, par conséquent, les éléments dans le même ordre, il faut pouvoir les faire coïncider, c'est-à-dire, les superposer de manière à ce que les éléments superposés soient partout les mêmes. Or, la coïncidence étant supposée possible à l'égard de deux suites dont l'une au moins provient du groupe $[A, B, C]$, des éléments 1 superposés ne pourront pas y occuper le même rang; car dans ce cas, les deux suites s'accorderaient sous le rapport des valeurs de A, B et C, et proviendraient, par conséquent, l'une et l'autre du groupe $[A, B, C]$; de plus, elles se rapporteraient évidemment à la même permutation du tableau (1), tandis que deux suites du groupe $[A, B, C]$, et par conséquent aussi les suites circulaires qui en proviennent, se rapportent nécessairement à deux permutations différentes. Il faut donc, si néanmoins il y a coïncidence, que le premier 1 de l'une des suites vienne se superposer ou sur le second ou sur le troisième 1 de l'autre; plus exactement, que les éléments 1 se superposent de l'une ou de l'autre des deux manières suivantes:

1.°	$\frac{\text{première suite}}{\text{seconde suite}}$	$\frac{\text{premier 1}}{\text{second 1}}$	$\frac{\text{second 1}}{\text{troisième 1}}$	$\frac{\text{troisième 1}}{\text{premier 1}}$
2.°	$\frac{\text{première suite}}{\text{seconde suite}}$	$\frac{\text{premier 1}}{\text{troisième 1}}$	$\frac{\text{seconde 1}}{\text{premier 1}}$	$\frac{\text{troisième 1}}{\text{second 1}}$

d'où il résulte que si la première suite provient de $[A, B, C]$, et appartient, par conséquent, au groupe (A, B, C), la seconde appartiendra ou au groupe (C, A, B) ou au groupe (B, C, A). Elle ne saurait donc provenir de $[A, B, C]$, à moins que les groupes (A, B, C), (C, A, B) et (B, C, A) ne se réduisent à un seul; ce qui n'a lieu qu'en admettant $A=B=C=2$. Ainsi donc, ce cas excepté, toutes les suites circulaires provenant du groupe $[A, B, C]$ seront différentes les unes des autres, et le groupe (A, B, C) les comprendra toutes les 20. Quant au cas de $A=B=C=2$, il est au contraire aisé de voir qu'à l'exception de

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & \\ 3 & & & & 1 \\ & 2 & 1\;3 & 2 & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} & 1 & 3 & 2 & \\ 2 & & & & 1 \\ & 3 & 1\;2 & 3 & \end{array}$$

toutes les autres suites circulaires provenant du groupe $[2, 2, 2]$ seront trois à trois égales entre elles. En effet, si $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$ est une permutation du tableau (1), $a_2 b_2 a_3 b_3 a_1 b_1$ et $a_3 b_3 a_1 b_1 a_2 b_2$ en seront deux autres, à moins qu'on n'ait

$$a_1 = a_2 = a_3; \quad b_1 = b_2 = b_3;$$

cas dans lequel ces trois permutations se réduisent à une seule, savoir à 232323 ou 323232. Or, les suites rectilignes

$$1\,a_1 b_1 1\,a_2 b_2 1\,a_3 b_3; \quad 1\,a_2 b_2 1\,a_3 b_3 1\,a_1 b_1; \quad 1\,a_3 b_3 1\,a_1 b_1 1\,a_2 b_2,$$

qui se déduisent des trois permutations indiquées, conduisent à la même suite circulaire, savoir à

$$\begin{array}{ccccc} & 1 \; a_1 & & b_1 \; 1 & \\ b_3 & & & & a_2 \\ & a_3 & 1 & b_2 & \end{array}$$

celle-ci résultera donc trois fois ou une seule fois du groupe [2, 2, 2], selon que les trois permutations mentionnées sont différentes les unes des autres ou non. Et réellement, le groupe [2, 2, 2] étant composé des suites

122123133	132122133
122132133	132123123
122133123	132123132
122133132	132132123
123122133	132132132
123123123	132133122
123123132	133122123
123132123	133122132
123132132	133123122
123133122	133132122

il est visible, en ordonnant de la manière suivante:

122123133	123133122	133122123
122132133	132133122	133122132
122133123	133123122	123122133
122133132	133132122	132122133
123123123		
123123132	123132123	132123123
123132132	132132123	132123132
132132132		

que les suites placées sur la même ligne horizontale conduisent à la même suite circulaire. Celles-ci seront donc ici au nombre de huit, que l'on peut représenter p. e. par les suites rectilignes:

122123133	133132122
122132133	133123122
123123123	132132132
123123132	132132123.

5

Comme on a généralement $A+B+C=6$, les groupes de suites circulaires qui viennent ici en considération, seront

(0, 0, 6)	(1, 0, 5)	(2, 1, 3)	(3, 3, 0)
(0, 1, 5)	(1, 1, 4)	(2, 2, 2)	(4, 0, 2)
(0, 2, 4)	(1, 2, 3)	(2, 3, 1)	(4, 1, 1)
(0, 3, 3)	(1, 3, 2)	(2, 4, 0)	(4, 2, 0)
(0, 4, 2)	(1, 4, 1)	(3, 0, 3)	(5, 0, 1)
(0, 5, 1)	(1, 5, 0)	(3, 1, 2)	(5, 1, 0)
(0, 6, 0)	(2, 0, 4)	(3, 2, 1)	(6, 0, 0)

Or, il est évident que chaque suite circulaire appartenant au groupe (A, B, C) fera pareillement partie des groupes (B, C, A) et (C, A, B); en effet, elle viendra se ranger dans l'un ou l'autre de ces groupes, selon qu'on y considère le second ou le troisième 1 comme le premier. Il s'ensuit de là, que les groupes (A, B, C), (B, C, A) et (C, A, B), quand ils sont différents les uns des autres, ne se distingueront que par le rang qu'on y a assigné aux éléments 1, et se composeront du reste des mêmes suites circulaires. Il suffira donc à notre but de ne tenir compte que d'un seul des trois groupes; ce qui nous permet de développer seulement dix groupes, p. e.

(0, 0, 6);	(0, 1, 5);	(0, 2, 4);	(0, 3, 3);	(0, 4, 2);
(0, 5, 1);	(1, 1, 4);	(1, 2, 3);	(1, 3, 2);	(2, 2, 2);

qui comprendront nécessairement toutes les suites circulaires que nous cherchons. Il est d'ailleurs aisé de voir qu'ils n'en comprendront aucune plus d'une fois; car si dans le nombre des suites circulaires contenues dans les dix groupes il y en avait deux d'égales, et que l'une en appartînt au groupe (A, B, C), l'autre appartiendrait, ainsi que nous l'avons vu, ou au groupe (C, A, B) ou au groupe (B, C, A). Mais si le premier est un des dix groupes, les deux autres en seront exclus, à moins qu'ils ne se réduisent tous les trois à un seul, savoir à (2, 2, 2). Il faudrait donc que les deux suites égales appartinssent l'une et l'autre au groupe (2, 2, 2); ce qui est impossible, puisque ce groupe, comme tous les autres, ne se compose que de suites différentes.

Au lieu de former les suites circulaires elles-mêmes, nous continuerons, pour simplifier, à les représenter par des suites rectilignes, commençant par le premier 1, en sous-entendant toujours que les éléments extrêmes de chaque suite soient considérés comme consécutifs, et que l'on tient compte de l'ambe qu'ils présentent, comme de ceux qui constituent deux autres éléments consécutifs quelconques. Nous ferons aussi remarquer, pour abréger le plus possible, que les permutations du tableau (1), ainsi que les huit suites rectilignes représentant le groupe (2, 2, 2), sont disposées sur deux colonnes, résultant l'une de l'autre en permutant les éléments 2 et 3 (*). Le tableau comprenant toutes les suites circulaires qui se composent des éléments 1, 2, 3, trois fois répétés, se partagera donc en deux moitiés, dont la première, relative aux premières colonnes, est représentée par les suites rectilignes :

(0, 0, 6)	(0, 1, 5)	(0, 2, 4)	(0, 3, 3)
111222333	112122333	112212333	112221333
111223233	112123233	112213233	112231233
111223323	112123323	112213323	112231323
111223332	112123332	112213332	112231332
111232233	112132233	112312233	112321233
111232323	112132323	112312323	112321323
111232332	112132332	112312332	112321332
111233223	112133223	112313223	112331223
111233232	112133232	112313232	112331232
111233322	112133322	112313322	112331322
(0, 4, 2)	(0, 5, 1)	(1, 1, 4)	(1, 2, 3)
112223133	112223313	121212333	121221333
112232133	112232313	121213233	121231233
112233123	112233213	121213323	121231323
112233132	112233312	121213332	121231332
112322133	112322313	121312233	121321233
112323123	112323213	121312323	121321323
112323132	112323312	121312332	121321332
112332123	112332213	121313223	121331223
112332132	112332312	121313232	121331232
112333122	112333212	121313322	121331322

(2)

(*) Quant au tableau (1) la seconde colonne resultera de la première si, après y avoir permuté les éléments 2 et 3, on renverse l'ordre des permutations, en commençant par

(1, 3, 2)		(2, 2, 2)	
121223133	121323123	122123133	
122232133	121323132	122132133	
121233123	121332123	123123123	(2)
121233132	121332132	123123132	
121322133	121333122		

et dont la seconde résultera de la première en y permutant les éléments 2 et 3.

6.

Les suites circulaires que nous avons nommées auxiliaires étant soumises encore à une seconde condition, savoir à celle de présenter, sous la forme de groupes de deux éléments consécutifs, les trois ambes 12, 13, 23, il nous reste à exclure des suites circulaires que nous venons de représenter sous forme rectiligne, toutes celles qui ne satisfont pas à cette condition. Si l'on examine sous ce rapport le tableau (2) comprenant la première moitié des suites rectilignes, et que l'on tienne compte dans chaque suite de l'ambe formé par les éléments extrèmes, on trouvera sans peine que les suites à en exclure sont

111223332	112123332	121221333
111232332	112221333	121333122
111233232	112333212	
111233322		

Or, d'une part, les suites résultant de celles-ci en y permutant les éléments 2 et 3, devront être exclus de la seconde moitié des suites rectilignes; car si un des ambes 12, 13, 23, ne se présente pas dans une suite, son transformé — qui est semblablement un des ambes 12, 13, 23 — ne se présentera pas non plus dans la suite transformée. D'autre part, les suites de la première moitié dans lesquelles les ambes 12, 13, 23 se présentent tous les trois, se transformeront en des suites qui satisfont à la même condition; car les ambes 12, 13, 23 se transformant respectivement en 13, 12, 32, se retrouveront nécessairement dans les suites transformées. De ces remarques il s'ensuit que les suites auxiliaires seront représentées en moitié par les suites rectilignes:

---

la dernière, en y faisant suivre l'avant-dernière, et ainsi de suite. — Quant aux huit suites représentant le groupe (2, 2, 2), les suites résultant l'une de l'autre se trouvent placées sur la même ligne horizontale.

111222333	112321323	121312233	
111223233	112321332	121312323	
111223323	112331223	121312332	
111232233	112331232	121313223	
111232323	112331322	121313232	
111233223	112223133	121313322	
112122333	112232133	121231233	
112123233	112233123	121231323	
112123323	112233132	121231332	
112132233	112322133	121321233	
112132323	112323123	121321323	
112132332	112323132	121321332	
112133223	112332123	121331223	
112133232	112332132	121331232	
112133322	112333122	121331322	(3)
112212333	112223313	121223133	
112213233	112232313	121232133	
112213323	112233213	121233123	
112213332	112233312	121233132	
112312233	112322313	121322133	
112312323	112323213	121323123	
112312332	112323312	121323132	
112313223	112332213	121332123	
112313232	112332312	121332132	
112313322	121212333	122123133	
112231233	121213233	122132133	
112231323	121213323	123123123	
112231332	121213332	123123132	
112321233			

et en moitié par celles qui en résultent en y permutant les éléments 2 et 3.

7.

Seconde partie. — Examen des cas où les suites auxiliaires sont égales entre elles. — Conséquence relative à la détermination de S.

Si les éléments 4, 5, 6, 7, trois fois répétés, sont intercalés dans une suite auxiliaire de manière à satisfaire aux conditions de la question, il en résultera une suite circulaire que nous nommerons complétée. — Tout groupe non interrompu d'éléments intercalés qui se trouve compris entre deux éléments d'une suite auxiliare sera nommé une intercalation. Les intercalations sont ou simples ou multiples, selon qu'elles consistent dans un seul élément ou en comprennent plusieurs.

Si l'on déduit de chaque suite auxiliaire toutes les suites cemplétées auxquelles elle donne lieu, on trouvera en même temps le nombre S, en ne prenant qu'une fois les suites complétées qui se présenteraient à plusieurs reprises. Examinons donc s'il existe de telles suites, et cela étant le cas, combien de fois elles se rencontrent.

En admettant que deux suites complétées soient égales entre elles, il deviendra évident, en les faisant coïncider, qu'elles résultent de la même suite auxiliare et des mêmes intercalations. Mais on voit en même temps que les 1 superposés ne peuvent pas y occuper le même rang; car, dans ce cas, chaque intercalation appartenant à l'une des suites, non seulement appartiendrait aussi à l'autre, mais elle y aurait en outre la même position, c'est-à-dire qu'elle serait appliquée à la même distance du premier 1 de la suite auxiliare commune. Les deux suites auraient donc la même origine sous tous les rapports, et la même opération serait exécutée deux fois; ce qui, comme il s'entend de soi-même, ne doit pas avoir lieu. Il faut donc, si néanmoins il y a coïncidence, que le premier 1 de l'une des suites vienne se superposer ou sur le second ou sur le troisième de l'autre; d'où l'on conclut, en faisant abstraction des éléments 4, 5, 6, 7, que la suite auxiliaire qui a servi à former l'une et l'autre suite, se trouvera coïncider avec elle-même, quoique les 1 superposés soient de rangs différents. C'est donc à cette condition que la suite auxiliaire doit satisfaire si l'on en peut déduire des suites complétées égales entre elles. Il est exigé par là — que ce soit du reste le second ou le troisième 1 qui se trouve superposé sur le premier — que les éléments contenus entre le premier et le second 1 de la suite auxiliaire soient les mêmes et se suivent dans le même ordre que ceux qui séparent le second 1 du troisième et celui-ci du premier; par conséquent les éléments intermédiaires seront au nombre de deux; de plus, ils seront eux-mêmes 2 et 3, et se présenteront dans l'ordre 23 ou 32, d'où il s'ensuit finalement que la suite auxiliaire sera

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 2 & 3 & \\ \text{ou} & 3 & & & & 1 \\ & 2 & 1 & 3 & 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & 1 & 3 & 2 & \\ \text{ou} & 2 & & & & 1 \\ & 3 & 1 & 2 & 3 & \end{array}$$

et qu'aucune autre suite auxiliaire ne saurait donner lieu à des suites complétées égales entre elles. Or, ayant déduit une telle suite de l'une ou de l'autre des deux suites exceptionnelles, on en peut déduire en outre deux autres qui lui soient égales, en y faisant avancer chaque intercalation de trois ou de six places; car en superposant dans le premier cas le premier 1 de la suite primitive sur le second 1 de la suite dérivée, l'une coïncidera nécessairement avec l'autre, ce qui aura lieu de même dans le second cas, si l'on superpose le premier 1 de la suite primitive sur le troisième 1 de la suite dérivée. D'autre part, il est évident qu'il n'existe pas d'autre suite égale à la suite primitive, puisqu'il n'y a pas d'autre mode de faire coïncider celle-ci avec une autre. On voit donc que les suites complétées qui résultent des deux suites auxiliaires exceptionnelles seront trois à trois égales entre elles, tandis que les suites auxiliaires seront toutes différentes les unes des autres. De cette circonstance il s'ensuit directement que si l'on connait le nombre des suites complétées qui résultent de chaque suite auxiliaire, on trouvera la valeur de S, en faisant la somme de toutes ces nombres, à l'exception de ceux qui se rapportent aux deux suites auxiliaires signalées, en y ajoutant le tiers de la somme de ces derniers.

8.

Troisième partie. — Des ambes altérés; des systèmes d'ambes altérés, et d'intercalations. — Formule pour déterminer S.

Chaque intercalation faisant partie d'une suite complétée, s'y trouve comprise entre deux éléments (de valeurs différentes ou de même valeur) qui sont consécutifs dans la suite auxiliaire correspondante, et y présentent un ambe que nous nommerons altéré, puisqu'il est le résultat d'une altération de la suite complétée. Les neuf ambes des suites auxiliaires se diviseront donc en ambes altérés et non altérés. Quant aux derniers, ils seront généralement au nombre de trois; car, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, les ambes 12, 13, 23, que présentent les suites complétées, doivent se retrouver sans altération dans les suites auxiliaires. Le nombre en question ne sera donc pas plus petit que trois, et il ne pourra pas être plus grand, parce que les autres ambes que présentent les suites complétées contiennent au moins un des éléments 4, 5, 6, 7, et ne peuvent, par cette raison, appartenir aux suites auxiliaires. De cette propriété générale on conclut directement cette autre, que le nombre des ambes altérés, et par conséquent aussi celui des intercalations, est généralement $=6$.

Si un des ambes 12, 13, 23 (les éléments étant pris dans ce sens ou en sens inverse) ne se présente qu'une fois dans une suite auxiliaire, il sera nécessairement un ambe non altéré; si au contraire, il s'y présente à plusieurs reprises (dans le même sens ou non), chacun de ces ambes de même composition pourra signifier l'ambe non altéré de cette sorte. Ainsi donc, en admettant que les ambes 12, 13, 23 se présentent respectivement l, m et n fois dans une suite auxiliaire donnée, celle ci donnera lieu à $l \cdot m \cdot n$ suppositions différentes au sujet des ambes non altérés, et par conséquent aussi au sujet des ambes altérés. On remarquera que dans ces suppositions les ambes altérés, ainsi que les non altérés ne varient que de position, et restent d'ailleurs les mêmes quant aux éléments dont ils sont formés. Nous désignerons donc sous le nom de système d'ambes altérés de la suite auxiliaire donnée les six ambes altérés qu'elle presente, pris dans un ordre arbitraire tant par rapport aux ambes eux-mêmes, que par rapport aux éléments de chaque ambe. Nous dirons aussi, en comparant les ambes du système avec les ambes altérés donnés de position en vertu d'une supposition déterminée, que chaque ambe du système correspond à un des ces ambes altérés, composé des mêmes éléments et déterminé quant à sa position dans la suite auxiliaire. Cette correspondance sera fixée d'elle-même par rapport aux ambes qui ne se rencontrent qu'une fois parmi les ambes altérés; si au contraire, un ambe s'y rencontre à plusieurs reprises, elle pourra être établie à volonté de diverses manières; nous supposerons donc dans ce cas, que l'on fasse les conventions nécessaires pour fixer les idées; de sorte que, quelque supposition que l'on admette au sujet des ambes altérés, la correspondance de ceux-ci avec les ambes du système se trouve généralement établie sans ambiguité.

9.

Les suites complétées devant être conformes à celles que nous avons définies dans l'énoncé de la quistion proposée (art. 2), il est nécessaire et il suffit que les intercalations qui servent à les former, satisfassent aux conditions fondamentales que voici:

1.° que, prises ensemble, elles se composent de douze éléments, savoir des éléments 4, 5, 6, 7, trois fois répétés;

2.° qu'elles présentent une fois chacun des six ambes à éléments inégaux que l'on peut former avec les éléments 4, 5, 6, 7, et qu'elles ne présentent pas d'autre ambe;

3.° que les éléments des intercalations qui viennent en contact avec les éléments des ambes altérés forment avec ceux-ci les douze ambes qui résultent de la combinaison de l'un des éléments 4, 5, 6, 7 avec l'un des éléments 1, 2, 3.

Et réellement, ces conditions remplies, les suites complétées se composeront des éléments 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, trois fois répétés, et outre les 18 ambes dont il est question dans la seconde et la troisième condition, elles présenteront encore les trois ambes 12, 13, 23, et par conséquent tous les ambes à éléments inégaux que l'on peut former avec 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Ce n'est comme on le voit, que la troisième condition fondamentale qui a égard aux ambes altérés, et seulement en ce qui concerne les éléments dont ils sont composés. La position des ambes altérés y étant indifférente, on peut, pour déduire une suite complétée d'une suite auxiliaire proposée, commencer par déterminer six intercalations qui, étant appliquées dans un certain ordre au système d'ambes altérées de la suite auxiliaire, satisfassent aux trois conditions fondamentales. Il faut remarquer à cet égard, que l'ordre dont il est question ici, doit-être déterminé sous le double rapport de la correspondance entre les ambes du système et les intercalations, et du sens dans lequel il faut prendre ces dernières, lorsqu'elles sont multiples.

Si l'on connaît six intercalations de cette nature, et l'ordre dans lequel elles s'appliquent au système d'ambes altérés, on obtiendra une suite complétée si, après qu'on a fixé la supposition à admettre au sujet des ambes altérés, on applique à chaque ambe de cette sorte, que présente alors la suite auxiliaire, la même intercalation qu'à l'ambe du système qui lui correspond selon nos conventions; en ayant soin toutefois de l'y insérer dans le même sens ou en sens inverse, selon que les ambes correspondants eux-mêmes observent le même ordre d'éléments ou non.

Nous nommerons système d'intercalations applicable à un système proposé d'ambes altérés six intercalations quelconques qui s'y appliquent conformément aux trois conditions fondamentales, l'ordre dans lequel cela a lieu étant déterminé sous le double rapport mentionné. Deux systèmes d'intercalations composés des mêmes intercalations, mais différents quant à l'ordre dans lequel ils s'appliquent au système proposé d'ambes altérés, doivent être considérés comme des systèmes différents puisqu'ils donnent lieu à des suites complétées différentes, lors même que la supposition au sujet des ambes altérés ne subit pas de variation.

10.

Si parmi les quantités l, m et n une au moins est >1, de sorte que le nombre des suppositions admissibles au sujet des ambes altérés et non altérés soit supérieur à l'unité, les suites complétées que l'on peut déduire de la suite auxiliaire proposée, se diviseront en $l \cdot m \cdot n$ groupes, selon la supposition qui y est en vigueur, et que l'on reconnaîtra dans chaque suite complétée en tenant compte de la position qu'y occupent les ambes 12, 13, 23. Il est facile à voir que tous ces groupes comprennent le même nombre de suites. En effet, si l'on suppose connus tous les systèmes d'intercalations applicables au système d'ambes altérés de la suite auxiliaire proposée, les suites complétées que l'on obtient par leur moyen, après qu'on a fixée la supposition à admettre, appartiendront toutes au même groupe. Viceversà, quelque suite de ce groupe que l'on considère, les six intercalations qu'elle renferme, constitueront un système d'intercalations applicable au système d'ambes altérés. On voit par là que le nombre de ces systèmes indiquera en même temps celui des suites comprises dans le groupe en question, et par conséquent aussi dans tout autre groupe; d'où il s'ensuit que tous les groupes comprennent le même nombre de suites. De là on est conduit à la conclusion suivante:

> Les ambes 12, 13, 23 se présentant respectivement l, m et n fois dans une suite auxiliaire, le nombre des suites complétées que l'on en peut déduire équivaudra à $l \cdot m \cdot n$ fois le nombre des systèmes d'intercalations applicables au système d'ambes altérés de la même suite auxiliaire.

On remarquera que cette conclusion subsiste même quand aucune des quantités l, m et n ne dépasse pas l'unité.

11.

Étant proposés une suite auxiliaire et son système d'ambes altérés, substituons dans celui-ci au lieu de 1 un quelconque des éléments 1, 2, 3, au lieu de 2 un quelconque des deux autres, et au lieu de 3 l'élément qui reste disponible. Le résultat de cette permutation des éléments 1, 2, 3 sera un système d'ambes transformés que nous nommerons, en abrégeant, le système transformé.

Tout système d'intercalations applicables au système proposé d'ambes altérés, s'appliquera aussi dans le même ordre au système transformé. En d'autres termes, les conditions fondamentales étant remplies vis-à-vis du premier système, elles le seront aussi vis-à-vis du second. Cela est évident par rapport aux deux premières conditions qui ne concernent que la combinaison des éléments 4, 5, 6, 7, entre eux. Quant à la troisième, les éléments des intercalations venant en contact avec les éléments des ambes du système proposé d'ambes altérés, formeront avec ceux-ci des ambes qui seront par supposition, 14, 15, 16, 17, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 36, 37. En mettant le système transformé à la place du système proposé, les ambes analogues à ceux-ci en résulteront, si l'on permute les éléments 1, 2, 3 de la même manière que dans le système proposé. Mais cette permutation reproduira évidemment les mêmes ambes, à l'ordre près. On voit donc que dans le cas actuel, la troisième condition ne sera pas moins remplie que les deux autres.

On prouverait de la même manière que viceversa tout système d'intercalations applicable au système transformé s'applique de même au système proposé; par conséquent, ces systèmes sont susceptibles des mêmes systèmes d'intercalations, et à plus forte raison, du même nombre de ces systèmes.

Si le système transformé est lui même un système d'ambes altérés, se rapportant comme tel à une autre suite auxiliaire, le produit $l \cdot m \cdot n$ aura la même valeur à l'égard de cette seconde suite qu'à l'égard de la suite proposée. Car, en rapportant primitivement à celle-ci les quantités l, m et n, les ambes 12, 13, 23 se rencontreront respectivement $l-1$, $m-1$, $n-1$ fois dans le système proposé. Or, en permutant les éléments 1, 2, 3, on permute en même temps les ambes 12, 13, 23; par conséquent, les valeurs de $l-1$, $m-1$, $n-1$, qui se rapportent au système transformé, résulteront des valeurs primitives de ces quantités, en permutant celles-ci d'une certaine manière; d'où l'on conclut qu'en permutant de la même manière les valeurs primitives de l, m, n, relatives à la suite proposée, les valeurs résultantes se rapporteront à l'autre suite. Mais cette permutation n'influe que sur l'ordre des facteurs du produit $l \cdot m \cdot n$; la valeur de celui-ci sera donc la même dans l'un et l'autre cas.

En conséquence de ces propositions, et en égard à la conclusion développée dans l'article précédent, on parvient sans difficulté à cette autre:

> Lorsque les systèmes d'ambes altérés de deux suites auxiliaires différentes sont les mêmes ou plus généralement, lorsqu'ils se transforment l'un dans l'autre par suite d'une certaine permutation des éléments 1, 2, 3, ces deux suites donneront lieu au même nombre de suites complétées.

12.

Les suites auxiliaires qui ont cette propriété en commun, seront rangées dans la même catégorie. Pour effectuer la division de toutes les suites auxiliaires conformément à ce point de vue, nous n'en considérerons d'abord que la première moitié, représentée dans le tableau (3) sous forme rectiligne. En désignant généralement par abc, une permutation quelconque de 123, on vérifiera aisément la division suivante de ce tableau:

1. ($aa\ aa\ bb\ bb\ cc\ cc$)

	suite	syst. d'ambes altérés	a	b	c
1	111222333	11 11 22 22 33 33	1	2	3

2. ($aa\ aa\ bb\ cc\ bc\ bc$)

	suite	syst. d'ambes altérés	a	b	c
1	111223233	11 11 22 33 23 23	1	2	3
2	111223323	11 11 22 33 23 23	1	2	3
3	111232233	11 11 22 33 23 23	1	2	3
4	111233223	11 11 22 33 23 23	1	2	3

5	112122333	33	33	11	22	12	12	3	1	2
6	112133322	33	33	11	22	12	12	3	1	2
7	112212333	33	33	11	22	12	12	3	1	2
8	112213332	33	33	11	22	12	12	3	1	2
9	112223133	22	22	11	33	13	13	2	1	3
10	112333122	33	33	11	22	12	12	3	1	2
11	112223313	22	22	11	33	13	13	2	1	3
12	112233312	33	33	11	22	12	12	3	1	2

3. (*aa aa bc bc bc bc*)

	suite	syst. d'ambes altérés						*a*	*b*	*c*
1	111232323	11	11	23	23	23	23	1	2	3
2	121212333	33	33	12	12	12	12	3	1	2
3	121213332	33	33	12	12	12	12	3	1	2

4. (*aa bb cc ab ac bc*)

	suite	syst. d'ambes altérés						*a*	*b*	*c*
1	112132233	11	22	33	12	13	23	1	2	3
2	112133223	11	22	33	12	13	23	1	2	3
3	112213233	11	22	33	12	13	23	1	2	3
4	112213323	11	22	33	12	13	23	1	2	3
5	112312233	11	22	33	12	13	23	1	2	3
6	112313322	11	22	33	12	13	23	1	2	3
7	112231233	11	22	33	12	13	23	1	2	3
8	112231332	11	22	33	12	13	23	1	2	3
9	112331223	11	22	33	12	13	23	1	2	3
10	112331322	11	22	33	12	13	23	1	2	3
11	112232133	11	22	33	12	13	23	1	2	3
12	112233123	11	22	33	12	13	23	1	2	3
13	112233132	11	22	33	12	13	23	1	2	3
14	112322133	11	22	33	12	13	23	1	2	3
15	112233213	11	22	33	12	13	23	1	2	3
16	112332213	11	22	33	12	13	23	1	2	3

5. aa bb ac ac bc bc)

	suite	syst. d'ambes altérés						*a*	*b*	*c*
1	112123233	11	33	12	12	32	32	1	3	2
2	112123323	11	33	12	12	32	32	1	3	2
3	112132332	11	33	12	12	32	32	1	3	2
4	112133232	11	33	12	12	32	32	1	3	2
5	112312332	11	33	12	12	32	32	1	3	2
6	112313223	11	22	13	13	23	23	1	2	3
7	112231323	11	22	13	13	23	23	1	2	3
8	112321233	11	33	12	12	32	32	1	3	2
9	112321332	11	33	12	12	32	32	1	3	2
10	112331232	11	33	12	12	32	32	1	3	2
11	112332123	11	33	12	12	32	32	1	3	2
12	112332132	11	33	12	12	32	32	1	3	2
13	112232313	11	22	13	13	23	23	1	2	3
14	112322313	11	22	13	13	23	23	1	2	3
15	112323312	11	33	12	12	32	32	1	3	2
16	112332312	11	33	12	12	32	32	1	3	2
17	121312233	22	33	21	21	31	31	2	3	1
18	121313322	22	33	21	21	31	31	2	3	1
19	121331223	22	33	21	21	31	31	2	3	1
20	121331322	22	33	21	21	31	31	2	3	1
21	121223133	22	33	21	21	31	31	2	3	1
22	121322133	22	33	21	21	31	31	2	3	1
23	122123133	22	33	21	21	31	31	2	3	1
24	122132133	22	33	21	21	31	31	2	3	1

6. (aa ab ac bc bc bc)

	suite	syst. d'ambes altérés						*a*	*b*	*c*
1	112132323	11	12	13	23	23	23	1	2	3
2	112312323	11	12	13	23	23	23	1	2	3
3	112313232	11	12	13	23	23	23	1	2	3
4	112321323	11	12	13	23	23	23	1	2	3

5	112323123	11 12 13 23 23 23	1	2	3
6	112323132	11 12 13 23 23 23	1	2	3
7	112323213	11 12 13 23 23 23	1	2	3
8	121213233	33 31 32 12 12 12	3	1	2
9	121213323	33 31 32 12 12 12	3	1	2
10	121312332	33 31 32 12 12 12	3	1	2
11	121313223	22 21 23 13 13 13	2	1	3
12	121231233	33 31 32 12 12 12	3	1	2
13	121231332	33 31 32 12 12 12	3	1	2
14	121321233	33 31 32 12 12 12	3	1	2
15	121321332	33 31 32 12 12 12	3	1	2
16	121331232	33 31 32 12 12 12	3	1	2
17	121232133	33 31 32 12 12 12	3	1	2
18	121233123	33 31 32 12 12 12	3	1	2
19	121233132	33 31 32 12 12 12	3	1	2
20	121332123	33 31 32 12 12 12	3	1	2
21	121332132	33 31 32 12 12 12	3	1	2

7. (*ab ab ac ac bc bc*)

	suite	syst. d'ambes altérés	*a*	*b*	*c*
1	121312323	12 12 13 13 23 23	1	2	3
2	121313232	12 12 13 13 23 23	1	2	3
3	121231323	12 12 13 13 23 23	1	2	3
4	121321323	12 12 13 13 23 23	1	2	3
5	121323123	12 12 13 13 23 23	1	2	3
6	121323132	12 12 13 13 23 23	1	2	3
7	123123123	12 12 13 13 23 23	1	2	3
8	123123132	12 12 13 13 23 23	1	2	3

Or, à chaque suite auxiliaire faisant partie de la première moitié en correspond une autre comprise dans la seconde, en ce sens que ces suites se transforment l'une dans l'autre, en y permutant les éléments 2 et 3; il est visible, de plus, que la même correspondance existera entre les systèmes d'ambes altérés de ces suites; mais la permutation de 2 et de 3 n'est autre chose qu'une permutation particulière de 123; par conséquent, les suites auxiliaires correspondantes appartiendront à la même catégorie, et le nombre de suites qu'en comprend chacune sera le double de celui qu'y contribue la première moitié.

Quant au produit $l \cdot m \cdot n$ qui a la même valeur par rapport à toutes les suites auxiliaires de la même catégorie, il suffit de le déterminer en chaque cas, à l'égard d'une seule; ce qu'on fera en établissant d'abord les valeurs de $l-1$, $m-1$, $n-1$, relatives à un quelconque des systèmes d'ambes altérés de chaque catégorie. De cette manière on trouve:

cat.	$l-1$	$m-1$	$n-1$	$l \cdot m \cdot n$
1	0	0	0	1
2	0	0	2	3
3	0	0	4	5
4	1	1	1	8
5	0	2	2	9
6	1	1	3	16
7	2	2	2	27

Si l'on désigne maintenant par [1] le nombre de systèmes d'intercalations applicables à un système d'ambes altérés de la première catégorie, ou bien au système général $aaaabbbbcccc$, et que l'on entende par [2], [3],... les nombres analogues relatifs à la seconde catégorie, à la troisième, et ainsi de suite, la recherche précédente se résumera finalement ainsi qu'il suit:

la cat.	1	comprend	2	suites,	chacune	donnant	lieu à	1 [1]	suites complétées
»	2	»	24	»	»	»		3 [2]	
»	3	»	6	»	»	»		5 [3]	
»	4	»	32	»	»	»		8 [4]	
»	5	»	48	»	»	»		9 [5]	
»	6	»	42	»	»	»		16 [6]	
«	7	»	16	»	»	»		27 [7]	

13.

En appliquant ces résultats à ce que nous avons dit sur la détermination du nombre S (voir la fin de l'art. 7), et en faisant attention que les suites auxiliaires

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ 1 & & & & 3 \\ 3 & & & & 1 \\ 2 & 1 & & 3 & 2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ 1 & & & & 2 \\ 2 & & & & 1 \\ 3 & 1 & & 2 & 3 \end{array}$$

appartiennent l'une et l'autre à la septième catégorie, on parvient directement à la formule suivante:

$$\begin{aligned} S &= 2\cdot[1]+24\cdot 3\cdot[2]+6\cdot 5\cdot[3]+32\cdot 8\cdot[4] \\ &\quad +48\cdot 9\cdot[5]+42\cdot 16\cdot[6]+14\,{}^{2}/_{3}\cdot 27\cdot[7] \\ &= 2\cdot[1]+72\cdot[2]+30\cdot[3]+256\cdot[4] \\ &\quad +432\cdot[5]+672\cdot[6]+396\cdot[7]. \end{aligned}$$

Il nous reste donc à déterminer les quantités [1], [2],... ce qui exige une discussion préalable des questions qui se rattachent aux systèmes d'intercalations.

14.

Quatrième partie. — Énumération des systèmes d'intercalations indépendants.

Un système d'intercalations applicable à un système d'ambes altérés ne sera complètement déterminé, ainsi que nous l'avons déjà dit, que si l'on fixe la correspondance entre les ambes et les intercalations, et le sens dans lequel chaque intercalation doit être prise, lorsqu'elle est multiple. On peut cependant concevoir les systèmes d'intercalations sous un point de vue plus général, en faisant abstraction de leurs rapports avec les systèmes d'ambes altérés, ou, ce qui revient au même, en ne tenant compte que des deux premières des conditions fondamentales. Dans ce cas, la correspondance entre les intercalations et les ambes est mise hors de question, et le sens dans lequel on prend les intercalations multiples devient indifférent. Si donc deux intercalations sont l'une l'inverse de l'autre, il nous suffira d'en admettre celle dont l'élément initial est inférieur à l'élément final, ou, si les éléments extrèmes sont égaux entre eux, celle dont le second élément est inférieur à l'avant-dernier. Nous allons maintenant former le tableau complet des systèmes d'intercalations ainsi définis, que nous distinguerons par le nom d'indépendants.

Les six nombres indiquant de combien d'éléments se composent les intercalations qui forment un système, seront nommés le système de nombres de ce dernier, et les systèmes d'intercalations indépendants qui s'accordent sous ce rapport, seront rangés dans la même classe. Or, la somme des six nombres constituant un système est invariablement $=12$, et les différentes manières de partager le nombre 12 en six nombres entiers, sont les suivants:

1. 222222	5. 422211	9. 531111
2. 322221	6. 432111	10. 621111
3. 332211	7. 441111	11. 711111;
4. 333111	8. 522111	

par conséquent, il n'y a pas d'autres systèmes de nombres que ceux-ci. Mais il est aussi aisé de voir que le système 711111 ne saurait appartenir à un système d'intercalations; car il n'existe pas d'intercalation à sept éléments. En effet, une telle intercalation présenterait six ambes comme groupes de deux éléments consécutifs, ambes qui seraient tous différents les uns des autres, et seraient par conséquent 45, 46, 47, 56, 57, 67. L'intercalation comprendrait donc aussi tous les éléments 4, 5, 6, 7, mais de telle manière qu'il y en eût au moins un qui ne s'y rencontrât qu'une fois; car dans le cas contraire, elle devrait se composer au moins de $2 \cdot 4 = 8$ éléments. Or, un tel élément, selon qu'il se trouve à l'extrémité ou dans l'intérieur de l'intercalation, ne serait en contact qu'avec un ou deux des trois autres. L'intercalation ne présenterait donc pas tous les ambes possibles, ce qui est en contradiction avec notre première conclusion; par conséquent, il n'existe pas d'intercalation composée de sept éléments.

D'après cela, nous n'avons à considérer que dix systèmes de nombres et autant de classes de systèmes indépendants. La question revient donc à déterminer pour chaque classe tous les systèmes indépendants qui s'y rapportent. Afin d'y parvenir avec plus de facilité, nous chercherons d'abord toutes les intercalations multiples, les conditions à remplir étant celles-ci: 1.° que les intercalations ne comprennent d'autres éléments que 4, 5, 6, 7; 2.° qu'elles ne présentent d'autres ambes que 45, 46, 47, 56, 57, 67, et qu'elles n'en présentent aucune plus d'une fois; condition qui sera remplie d'elle-même, si l'intercalation ne comprend que des éléments différents les uns des autres, et qui exige dans le cas contraire, que deux éléments égaux soient séparés au moins par deux éléments intermédiaires.

15.

Quant aux intercalations à deux éléments, ils seront généralement de la forme $\alpha\beta$, en entendant par α et β deux quelconques des éléments 4, 5, 6, 7, différents l'un de l'autre et tels que α soit inférieur à β.

En désignant par γ et δ les deux autres des quatre éléments, les intercalations à trois éléments seront généralement exprimées par

$$\alpha\gamma\beta$$
$$\alpha\delta\beta.$$

Quant aux intercalations à quatre éléments, il y a deux cas à distinguer; l'un où les éléments extrèmes sont différents l'un de l'autre, le second où ces éléments sont égaux entre eux. Le premier cas donne lieu aux deux formes

$$\alpha\gamma\delta\beta$$
$$\alpha\delta\gamma\beta$$

où α, β, γ, δ ont la même signification que ci-dessus; dans le second cas on trouvera les formes

$$ABCA$$
$$ABDA$$
$$ACDA$$

en entendant par A un quelconque des éléments 4, 5, 6, 7, et par B, C, D les trois autres, mais tels que B soit inférieur à C, C inférieur à D.

Les intercalations à cinq éléments préséntent les mêmes cas; on trouvera donc les formes

$$\begin{array}{ll} \alpha\beta\gamma\delta\beta & ABDCA \\ \alpha\beta\delta\gamma\beta & ABCDA \\ \alpha\gamma\delta\alpha\beta & ACBDA \\ \alpha\delta\gamma\alpha\beta & \end{array}$$

Pour ce qui est enfin des intercalations à six éléments, on peut aisément se convaincre à priori que le second cas est impossible; car si A est l'élément initial, il ne pourra occuper simultanément ni la seconde ni la troisième place; s'il est aussi l'élément final, il ne pourra non plus occuper ni la quatrième ni la cinquième. Les quatre éléments intermédiaires ne comprendront donc que B, C et D; ce qui exige qu'un de ces éléments, p. e. B, soit répété, et se trouve par conséquent aux deux extrèmités des éléments intermédiaires. Or, les intercalations $ABCDBA$ et $ABDCBA$ sont inadmissibles l'une et l'autre, puisqu'elles présentent deux fois l'ambe

AB. Il ne reste donc que le premier cas à considérer qui donne lieu aux formes

$$\alpha\beta\gamma\alpha\delta\beta$$
$$\alpha\beta\delta\alpha\gamma\beta$$
$$\alpha\gamma\beta\alpha\delta\beta$$
$$\alpha\delta\beta\alpha\gamma\beta$$
$$\alpha\gamma\beta\delta\alpha\beta$$
$$\alpha\delta\beta\gamma\alpha\beta.$$

En donnant maintenant à α, β, γ, δ, et à A, B, C, D toutes les valeurs compatibles avec les restrictions que nous avons faites, savoir celles ci:

	α	β	γ	δ
1	4	5	6	7
2	4	6	5	7
3	4	7	5	6
4	5	6	4	7
5	5	7	4	6
6	6	7	4	5

	A	B	C	D
1	4	5	6	7
2	5	4	6	7
3	6	4	5	7
4	7	4	5	6

on trouvera sans difficulté le tableau suivant de toutes les intercalations multiples:

2 él.	3 él.	4 éléments		5 éléments		
45	465	4675	4564	45675	56476	45764
46	475	4765	4574	45765	56746	45674
47	456	4576	4674	46745	54756	46574
56	476	4756	5465	47645	57456	54765
57	457	4567	5475	46576	57467	54675
67	467	4657	5675	46756	57647	56475
	546	5476	6456	45746	54657	64756
	576	5746	6476	47546	56457	64576
	547	5467	6576	47567	67457	65476
	567	5647	7457	47657	67547	74657
	647	6457	7467	45647	64567	74567
	657	6547	7567	46547	65467	75467

6 éléments

456475	475467	574567
457465	476457	576547
465475	457467	547567
475465	467457	567547
465745	457647	547657
475645	467547	567457
465476	564576	674657
467456	567546	675647
456476	546576	647657
476456	576546	657647
456746	546756	647567
476546	576456	657467

16.

Il nous sera maintenant très facile de former tous les systèmes indépendants compris dans une classe quelconque. Voici d'abord le procédé pour en trouver les intercalations multiples.

En admettant que le système respectif de nombres contienne k nombres supérieurs à l'unité, soit l, m,... p, on combinera entre elles toutes les intercalations à l, à m,... à p éléments que nous venons d'énumérer, en formant les combinaisons avec une intercalation de chaque espèce, et en étendant cette opération sur toutes les combinaisons qui ne présentent qu'une fois le même ambe. Toutes les combinaisons que l'on obtient par là, seront sans exception propres à la formation de systèmes indépendants. Pour s'en assurer à priori, il suffit de prouver qu'elles présentent invariablement six ambes, et qu'elles ne renferment le même élément plus de trois fois. Quant au nombre des ambes, il est d'abord

$$l-1+m-1+\cdots+p-1=l+m+\cdots+p-k;$$

car toute intercalation multiple présente un ambe de moins qu'elle ne contient d'éléments. De plus, en désignant par k_1 le nombre des intercalations simples, on a

$$k+k_1=6;\quad l+m+\cdots+p+k_1=12$$

et par conséquent

$$l+m+\cdots+p-k=12-6=6;$$

ce qui prouve le premier point. En second lieu, ces six ambes étant 45, 46, 47, 56, 57, 67, chacun des éléments 4, 5, 6, 7 s'y trouvera combiné avec les trois autres; il faut donc ou qu'il se rencontre une fois dans l'intérieur d'une intercalation, et une fois à l'extrèmité de la même ou d'une autre, ou qu'il occupe trois fois une place extrème. De là on conclut que tout élément sera contenu ou deux ou trois fois dans une combinaison; ce qui prouve le second point, et nous fait voir en même temps qu'on complétera les systèmes d'intercalations en ajoutant aux combinaisons comme intercalations simples tous les éléments qui n'y sont contenus que deux fois. En suivant la marche que nous venons de tracer, on parviendra au tableau suivant des systèmes indépendants:

I. (222222)

1	45	46	47	56	57	67

II. (322221)

1	465	45	47	57	67	6	7	546	47	56	57	67	4
2	475	45	46	56	67	7	8	576	45	46	47	56	7
3	456	46	47	57	67	5	9	547	46	56	57	67	4
4	476	45	46	56	57	7	10	567	45	46	47	57	6
5	457	46	47	56	67	5	11	647	45	56	57	67	4
6	467	45	47	56	57	6	12	657	45	46	47	67	5

III. (332211)

1	465	475	45	67	6	7	10	456	476	46	57	5	7
2	465	476	45	57	6	7	11	456	467	47	57	5	6
3	465	457	47	67	5	6	12	456	576	46	47	5	7
4	465	576	45	47	6	7	13	456	647	57	67	4	5
5	465	547	57	67	4	6	14	476	457	46	56	5	7
6	475	456	46	67	5	7	15	476	546	56	57	4	7
7	475	467	45	56	6	7	16	476	657	45	46	5	7
8	475	546	56	67	4	7	17	457	467	47	56	5	6
9	475	567	45	46	6	7	18	457	567	46	47	5	6

19	457	647	56	67	4	5	25	576	547	46	56	4	7
20	467	547	56	57	4	6	26	576	647	45	56	4	7
21	467	657	45	47	5	6	27	547	567	46	57	4	6
22	546	576	47	56	4	7	28	547	657	46	67	4	5
23	546	567	47	57	4	6	29	567	647	45	57	4	6
24	546	657	47	67	4	5	30	647	657	45	67	4	5

IV. (333111)

1	465	476	457	5	6	7	5	456	576	647	4	5	7
2	465	576	547	4	6	7	6	476	546	657	4	5	7
3	475	456	467	5	6	7	7	457	567	647	4	5	6
4	475	546	567	4	6	7	8	467	547	657	4	5	6

V. (422211)

1	4675	45	47	56	6	7	13	4564	47	57	67	5	6
2	4765	45	46	57	6	7	14	4574	46	56	67	5	7
3	4576	46	47	56	5	7	15	4674	45	56	57	6	7
4	4756	45	46	67	5	7	16	5465	47	57	67	4	6
5	4567	46	47	57	5	6	17	5475	46	56	67	4	7
6	4657	45	47	67	5	6	18	5675	45	46	47	6	7
7	5476	46	56	57	4	7	19	6456	47	57	67	4	5
8	5746	45	56	67	4	7	20	6476	45	56	57	4	7
9	5467	47	56	57	4	6	21	6576	45	46	47	5	7
10	5647	45	57	67	4	6	22	7457	46	56	67	4	5
11	6457	47	56	67	4	5	23	7467	45	56	57	4	6
12	6547	46	57	67	4	5	24	7567	45	46	47	5	6

VI. (432111)

1	4675	456	47	5	6	7	8	4756	546	67	4	5	7
2	4675	547	56	4	6	7	9	4567	475	46	5	6	7
3	4765	457	46	5	6	7	10	4567	647	57	4	5	6
4	4765	546	57	4	6	7	11	4657	476	45	5	6	7
5	4576	465	47	5	6	7	12	4657	547	67	4	5	6
6	4576	647	56	4	5	7	13	5476	465	57	4	6	7
7	4756	467	45	5	6	7	14	5476	657	46	4	5	7

15	5746	456	67	4	5	7		37	5475	465	67	4	6	7
16	5746	567	45	4	6	7		38	5475	467	56	4	6	7
17	5467	475	56	4	6	7		39	5475	567	46	4	6	7
18	5467	657	47	4	5	6		40	5675	546	47	4	6	7
19	5647	457	67	4	5	6		41	5675	547	46	4	6	7
20	5647	576	45	4	6	7		42	5675	647	45	4	6	7
21	6457	476	56	4	5	7		43	6456	475	67	4	5	7
22	6457	567	47	4	5	6		44	6456	476	57	4	5	7
23	6547	467	57	4	5	6		45	6456	576	47	4	5	7
24	6547	576	46	4	5	7		46	6476	456	57	4	5	7
								47	6476	457	56	4	5	7
								48	6476	657	45	4	5	7
25	4564	475	67	5	6	7		49	6576	546	47	4	5	7
26	4564	476	57	5	6	7		50	6576	547	46	4	5	7
27	4564	576	47	5	6	7		51	6576	647	45	4	5	7
28	4574	465	67	5	6	7		52	7457	465	67	4	5	6
29	4574	467	56	5	6	7		53	7457	467	56	4	5	6
30	4574	567	46	5	6	7		54	7457	567	46	4	5	6
31	4674	456	57	5	6	7		55	7467	456	57	4	5	6
32	4674	457	56	5	6	7		56	7467	457	56	4	5	6
33	4674	657	45	5	6	7		57	7467	657	45	4	5	6
34	5465	475	67	4	6	7		58	7567	546	47	4	5	6
35	5465	476	57	4	6	7		59	7567	547	46	4	5	6
36	5465	576	47	4	6	7		60	7567	647	45	4	5	6

VII. (441111)

1	4675	6547	4	5	6	7		4	4756	5467	4	5	6	7
2	4765	6457	4	5	6	7		5	4567	5746	4	5	6	7
3	4576	5647	4	5	6	7		6	4657	5476	4	5	6	7

VIII. (522111)

1	45675	46	47	5	6	7		5	46576	45	47	5	6	7
2	45765	46	47	5	6	7		6	46756	45	47	5	6	7
3	46745	56	57	4	6	7		7	45746	56	67	4	5	7
4	47645	56	57	4	6	7		8	47546	56	67	4	5	7

9	47567	45	46	5	6	7	23	64567	47	57	4	5	6
10	47657	45	46	5	6	7	24	65467	47	57	4	5	6
11	45647	57	67	4	5	6	25	45764	47	56	5	6	7
12	46547	57	67	4	5	6	26	45674	46	57	5	6	7
13	56476	45	57	4	6	7	27	46574	45	67	5	6	7
14	56746	45	57	4	6	7	28	54765	46	57	4	6	7
15	54756	46	67	4	5	7	29	54675	47	56	4	6	7
16	57456	46	67	4	5	7	30	56475	45	67	4	6	7
17	57467	45	56	4	6	7	31	64756	45	67	4	5	7
18	57647	45	56	4	6	7	32	64576	47	56	4	5	7
19	54657	47	67	4	5	6	33	65476	46	57	4	5	7
20	56457	47	67	4	5	6	34	74657	45	67	4	5	6
21	67457	46	56	4	5	7	35	74567	46	57	4	5	6
22	67547	46	56	4	5	7	36	75467	47	56	4	5	6

IX. (531111)

1	45675	647	4	5	6	7	13	56476	457	4	5	6	7
2	45765	647	4	5	6	7	14	56746	457	4	5	6	7
3	46745	657	4	5	6	7	15	54756	467	4	5	6	7
4	47645	657	4	5	6	7	16	57456	467	4	5	6	7
5	46576	547	4	5	6	7	17	57467	456	4	5	6	7
6	46756	547	4	5	6	7	18	57647	456	4	5	6	7
7	45746	567	4	5	6	7	19	54657	476	4	5	6	7
8	47546	567	4	5	6	7	20	56457	476	4	5	6	7
9	47567	546	4	5	6	7	21	67457	465	4	5	6	7
10	47657	546	4	5	6	7	22	67547	465	4	5	6	7
11	45647	576	4	5	6	7	23	64567	475	4	5	6	7
12	46547	576	4	5	6	7	24	65467	475	4	5	6	7

X. (621111)

1	456475	67	4	5	6	7	7	465476	57	4	5	6	7
2	457465	67	4	5	6	7	8	467456	57	4	5	6	7
3	465475	67	4	5	6	7	9	456476	57	4	5	6	7
4	475465	67	4	5	6	7	10	476456	57	4	5	6	7
5	465745	67	4	5	6	7	11	456746	57	4	5	6	7
6	475645	67	4	5	6	7	12	476546	57	4	5	6	7

13	475467	56	4	5	6	7	25	574567	46	4	5	6	7
14	476457	56	4	5	6	7	26	576547	46	4	5	6	7
15	457467	56	4	5	6	7	27	547567	46	4	5	6	7
16	467457	56	4	5	6	7	28	567547	46	4	5	6	7
17	457647	56	4	5	6	7	29	547657	46	4	5	6	7
18	467547	56	4	5	6	7	30	567457	46	4	5	6	7
19	564576	47	4	5	6	7	31	674657	45	4	5	6	7
20	567546	47	4	5	6	7	32	675647	45	4	5	6	7
21	546576	47	4	5	6	7	33	647657	45	4	5	6	7
22	576546	47	4	5	6	7	34	657647	45	4	5	6	7
23	546756	47	4	5	6	7	25	647567	45	4	5	6	7
24	576456	47	4	5	6	7	36	657467	45	4	5	6	7

17.

Cinquième partie. — Des systèmes dérivés et auxiliaires. Méthode qui en découle pour déterminer les quantités [1], [2],...

Dans le nombre des systèmes d'intercalations indépendants se trouvent nécessairement tous ceux qui, étant pris dans un certain ordre, deviennent applicables à un système d'ambes altérés. Pour juger dans un cas donné, quels sont ces systèmes, il faut avoir recours à la troisième condition fondamentale. Or, cette condition, en tant qu'elle concerne les intercalations, ne tient compte que des éléments qui viennent en contact avec ceux des ambes altérés. Il convient donc, sous ce point de vue, d'indiquer chaque intercalation, multiple ou simple, par ces deux éléments caractéristiques; l'un étant celui par lequel elle touche le premier élément de l'ambe altéré correspondant, l'autre celui par lequel elle en touche le second. Ce seront les éléments extrèmes de l'intercalation, si celle-ci est multiple; si elle est simple, ils consisteront l'un et l'autre dans l'élément dont l'intercalation est formée, puisque cet élément se trouve alors en contact et avec le premier et avec le second de l'ambe altéré correspondant.

Les deux éléments caractéristiques d'une intercalation seront considérés comme formant un ambe, et les six ambes de cette nature, qui indiquent les intercalations constituant un système (indépendant ou déterminé quant à son ordre), en seront nommées le système dérivé. D'autre part, nous entendrons par système auxiliaire applicable à un système proposé d'ambes altérés six ambes quelconques qui, ne comprenant d'autres éléments que 4, 5, 6, 7, s'y appliquent dans un certain ordre, conformément à la troisième condition fondamentale. Cet ordre sera fixé en chaque cas, non seulement sous le rapport de la correspondance entre les ambes altérés et ceux du système auxiliaire, mais aussi relativement au sens dans lequel on prend ces derniers; chaque élément d'un de ces ambes devant être de même rang que l'élément contigu de l'ambe altéré correspondant.

Si dans le nombre des systèmes auxiliaires applicables à un système d'ambes altérés proposé, il s'en trouve un dont les ambes soient en même temps ceux du système dérivé d'un système indépendant, celui-ci deviendra applicable au même système d'ambes altérés, si l'on en détermine l'ordre analoguement à celui du système auxiliaire en question. A cette fin, il faut substituer à chaque ambe une intercalation qu'il indique, et prendre chaque intercalation multiple dans un sens tel que son élément initial s'accorde avec le premier, son élément final avec le second élément de l'ambe qu'elle remplace.

Il faut remarquer quant à cet ordre, que la substitution des intercalations s'accomplira sans ambiguité, si tous les ambes du système auxiliaire (ou dérivé) sont différents les uns des autres; si au contraire, plusieurs de ces ambes sont égaux entre eux (qu'il soient d'ailleurs pris dans le même sens ou non), les intercalations qu'ils indiquent et qui les doivent remplacer, pourront être permutées entre elles de toutes les manières possibles. On se convaincra du reste, par l'inspection du tableau de l'article précédent, que dans aucun système indépendant, plus d'un ambe caractéristique n'appartienne à plusieurs intercalations, et que par conséquent, le système auxiliaire ou dérivé duquel il s'agit, ne saurait contenir plusieurs fois qu'un seul ambe.

Il faut remarquer en second lieu, que, la substitution des intercalations accomplie, le sens de toute intercalation multiple sera déterminé sans ambiguité, lorsqu'elle est à éléments extrèmes inégaux. Dans le cas contraire, l'ambe qu'elle remplace se composera de deux éléments égaux, et ne sera plus propre à en fixer le sens; l'un et l'autre seront donc alors également admissibles.

Ces remarques nous font voir qu'en certains cas l'ordre du système indépendant pourra se déterminer de diverses manières, tout en restant analogue à celui du système auxiliaire. Or, chacune de ces manières se rapporte à un autre système d'intercalations applicable au système d'ambes altérés proposé (voir la fin de l'art. 9). Si donc on admet en général, qu'un système indépendant renferme L intercalations possédant le même ambe caractéristique, et que l'on désigne par M le nombre de ses intercalations multiples à éléments extrêmes égaux, la valeur de L étant selon le cas, 1, 2 ou 3, et celle de M, 0 ou 1, on parvient à la conclusion suivante qui embrasse tous le cas qui peuvent ici venir en considération:

En admettant que les ambes d'un certain système auxiliaire applicable à un système d'ambes altérés proposé soient ceux du système dérivé d'un système indépendant, et que les valeurs de L et de M relatives à ce dernier soient λ et μ, celui-ci donnera lieu à $1 \cdot 2 \ldots \lambda \cdot 2^{\mu}$ systèmes d'intercalations différents, applicables au système d'ambes altérés proposé, et s'y appliquant tous dans un ordre analogue à celui du système auxiliaire en question.

18.

Si les ambes de ce système auxiliaire sont ceux d'un système dérivé commun à plusieurs systèmes indépendants, la conclusion précédente se rapportera à chacun de ces derniers, en y déterminant convenablement les valeurs de L et de M. Or, la valeur de L y sera évidemment la même, tandis que la quantité M y possédera, généralement parlant, des valeurs différentes. On est donc conduit à cette autre conclusion:

À tout système auxiliaire applicable à un système d'ambes altérés proposé correspondra un nombre déterminé de systèmes d'intercalations s'appliquant au système proposé dans un ordre analogue. Ce nombre dépendra, en chaque cas, de la quantité et de la nature des systèmes indépendants qui ont les ambes du système auxiliaire respectif pour système dérivé; il sera $=0$, s'il n'existe pas de tels systèmes indépendants; si au contraire, il en existe un ou plusieurs, et que la quantité L y possède la valeur (commune) λ, la quantité M les valeurs μ', μ'',... le même nombre sera exprimé par

$$1 \cdot 2 \ldots \lambda \cdot 2^{\mu'} + 1 \cdot 2 \ldots \lambda \cdot 2^{\mu''} + \cdots = 1 \cdot 2 \ldots \lambda [2^{\mu'} + 2^{\mu''} + \cdots] = P;$$

formule qui comprend autant de termes qu'il y a de systèmes indépendants qui s'y rapportent.

Il importe d'ajouter la remarque qu'à deux systèmes d'intercalations différents correspondent des systèmes d'intercalations différents. Cela est évident si les ambes de ces systèmes auxiliaires ne sont pas les mêmes, et constituent, par conséquent, des systèmes dérivés différents. Dans le cas contraire, les deux systèmes auxiliaires, puisqu'on les suppose différents, le seront quant à l'ordre; par conséquent, tout système d'intercalations correspondant à l'un différera de ceux qui correspondent à l'autre.

Il n'est pas moins aisé de voir que tout système d'intercalations applicable au système d'ambes altérés proposé, doit correspondre à un système auxiliaire qui s'y applique. En effet, quel que soit ce système d'intercalations, son système dérivé pris dans un ordre analogue au sien, satisfera à la troisième condition fondamentale, et sera par conséquent un système auxiliaire. C'est donc à celui-ci que correspondra le système d'intercalations en question.

Il s'ensuit de ces remarques jointes à la dernière conclusion, que l'on obtiendra tous les systèmes d'intercalations applicables au système d'ambes altérés proposé, en réunissant tous ceux qui correspondent aux différents systèmes auxiliaires applicables au même système d'ambes altérés. Il suffit donc, pour trouver le nombre des premiers, d'exécuter les opérations suivantes:

1.° de désigner les systèmes dérivés et les valeurs de L et de M pour tous les systèmes indépendants que nous avons énumérés; d'indiquer relativement à chaque système dérivé différent, les systèmes indépendants qui l'ont en commun, et la valeur de P qui en dépend;

2.° de former le tableau de tous les systèmes auxiliaires applicables au système d'ambes altérés proposé, d'en exclure ceux dont les ambes ne constituent pas de système dérivé, et de désigner pour chacun des autres la valeur de P dépendant du système dérivé particulier qui s'y rapporte. La somme de tous ces nombres sera le nombre cherché.

Il s'agira donc maintenant, pour déterminer les quantités [1], [2],..., d'exécuter ces opérations relativement aux différents systèmes d'ambes altérés; ce qui n'exige, dans chaque catégorie, que la considération d'un seul système, que nous supposerons partout être le système général (en a, b, c).

19.

Sixième partie. — Détermination des quantités [1], [2],..., **de S, etc.**

Première opération. — Nous diviserons les systèmes dérivés par catégories, en comprenant dans chacune tous ceux qui se transforment les uns dans les autres, par suite de certaines permutations des éléments 4, 5, 6, 7. En désignant généralement une telle permutation par $ABCD$, et en dénotant chaque système indépendant par deux chiffres, le premier ayant rapport à sa classe, le second au rang qu'il y occupe, on trouvera d'abord le tableau suivant de tous les systèmes dérivés différents, divisés d'après leurs catégories, avec l'indication des systèmes indépendants auxquels ils appartiennent, et des valeurs respectives de L et de M:

1.°	AB	AC	AD	BC	BD	CD . . . $L=1$,	$M=0$
	45	46	47	56	57	67 . . . I, 1	
2.°	AB	AB	AC	BC	DC	DD . . . $L=2$,	$M=0$
	45	45	47	57	67	66 . . . II, 1	
	45	45	46	56	76	77 . . . II, 2	
	46	46	47	67	57	55 . . . II, 3	
	46	46	45	65	75	77 . . . II, 4	
	47	47	46	76	56	55 . . . II, 5	
	47	47	45	75	65	66 . . . II, 6	
	56	56	57	67	47	44 . . . II, 7	
	56	56	54	64	74	77 . . . II, 8	
	57	57	56	76	46	44 . . . II, 9	
	57	57	54	74	64	66 . . . II, 10	
	67	67	65	75	45	44 . . . II, 11	
	67	67	64	74	54	55 . . . II, 12	
3.°	AB	AB	AB	CD	CC	DD . . . $L=3$,	$M=0$
	45	45	45	67	66	77 . . . III, 1	
	46	46	46	57	55	77 . . . III, 10	
	47	47	47	56	55	66 . . . III, 17	
	56	56	56	47	44	77 . . . III, 22	
	57	57	57	46	44	66 . . . III, 27	
	67	67	67	45	44	55 . . . III, 30	

4.°

AB	AB	AC	BD	CC	DD . . . $L=2$,	$M=0$
45	45	46	57	66	77 . . . III (2, 9)	V, 2
45	45	47	56	77	66 . . . III (4, 7)	V, 1
46	46	45	67	55	77 . . . III (6, 16). . . .	V, 4
46	46	47	65	77	55 . . . III (12, 14) . . .	V, 3
47	47	45	76	55	66 . . . III (3, 21). . . .	V, 6
47	47	46	75	66	55 . . . III (11, 18) . . .	V, 5
56	56	54	67	44	77 . . . III (8, 26). . . .	V, 8
56	56	57	64	77	44 . . . III (15, 25) . . .	V, 7
57	57	54	76	44	66 . . . III (5, 29). . . .	V, 10
57	57	56	74	66	44 . . . III (20, 23) . . .	V, 9
67	67	64	75	44	55 . . . III (13, 28) . . .	V, 12
67	67	65	74	55	44 . . . III (19, 24) . . .	V, 11

5.°

AB	AC	AD	BB	CC	DD . . . $L=1$	
45	46	47	55	66	77 . . . IV (1, 3).	$M=0$
					V (18, 21, 24).	$M=1$
					VI (1, 3, 5, 7, 9, 11).	$M=0$
					VIII (1, 2, 5, 6, 9, 10)	$M=0$
54	56	57	44	66	77 . . . IV (2, 4).	$M=0$
					V (15, 20, 23).	$M=1$
					VI (2, 4, 13, 16, 17, 20).	$M=0$
					VIII (3, 4, 13, 14, 17, 18)	$M=0$
64	65	67	44	55	77 . . . IV (5, 6).	$M=0$
					V (14, 17, 22).	$M=1$
					VI (6, 8, 14, 15, 21, 24).	$M=0$
					VIII (7, 8, 15, 16, 21, 22).	$M=0$
74	75	76	44	55	66 . . . IV (7, 8).	$M=0$
					V (13, 16, 19).	$M=1$
					VI (10, 12, 18, 19, 22, 23).	$M=0$
					VIII (11, 12, 19, 20, 23, 24) . . . . . . ,	$M=0$

6.° $AB\ CD\ AA\ BB\ CC\ DD \ldots L=1$

---

45 67 44 55 66 77 . . . VI $\begin{pmatrix} 25, 28, 33, 34, 37, 42 \\ 43, 48, 51, 52, 57, 60 \end{pmatrix}$ . . . . $M=1$

VII (1, 2) . . . . $M=0$

VIII (27, 30, 31, 34). . . . . $M=1$

IX (1, 2, 3, 4, 21, 22, 23, 24) . . . . . . $M=0$

X $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 31, 32, 33, 34, 35, 36 \end{pmatrix}$. . . . . $M=0$

46 57 44 66 55 77 . . . VI $\begin{pmatrix} 26, 30, 31, 35, 39, 41 \\ 44, 46, 50, 54, 55, 59 \end{pmatrix}$ . . . . $M=1$

VII (3, 4) . . . . $M=0$

VIII (26, 28, 33, 35). . . . . $M=1$

IX (5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, 20) . . . . . . $M=0$

X $\begin{pmatrix} 7, 8, 9, 10, 11, 12 \\ 25, 26, 27, 28, 29, 30 \end{pmatrix}$. . . . . $M=0$

47 56 44 77 55 66 . . . VI $\begin{pmatrix} 27, 29, 32, 36, 38, 40 \\ 45, 47, 49, 53, 56, 58 \end{pmatrix}$ . . . . $M=1$

VII (5, 6) . . . . $M=0$

VIII (25, 29, 32, 36). . . . . $M=1$

IX (9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16) . . . . $M=0$

X $\begin{pmatrix} 13, 14, 15, 16, 17, 18 \\ 19, 20, 21, 22, 23, 24 \end{pmatrix}$. . . . . $M=0$

Quant aux valeurs de P qu'il faut ajouter à ce tableau, pour compléter la première opération, il est aisé de reconnaître qu'elles sont constantes pour tous les systèmes dérivés appartenant à la même catégorie. Il suffit donc, en chaque cas, de la calculer pour un seul; ce qui nous donne:

catégorie							P
1.	AB	AC	AD	BC	BD	CD	1
2.	AB	AB	AD	BD	CD	CC	2
3.	AB	AB	AB	CD	CC	DD	6
4.	AB	AB	AC	BD	CC	DD	6
5.	AB	AC	AD	BB	CC	DD	20
6.	AB	CD	AA	BB	CC	DD	54

20.

Si dans l'une ou l'autre des formes générales qui caractérisent les différentes catégories, on substitue une permutation quelconque de 4567 au lieu de $ABCD$ (*), le système d'ambes résultant, pris dans un ordre convenable, sera dans tous les cas un des systèmes dérivés de la catégorie respective que nous venons d'énumérer. Il s'ensuit de cette observation, qu'il est du reste aisé de vérifier, que tout système auxiliaire que l'on peut ranger sous une de ces formes générales, en en changeant convenablement l'ordre, constitue par ses ambes un système dérivé. La valeur de P relative à un tel système auxiliaire, est donc celle qui se rapporte à la forme générale qui le comprend. Cette conclusion s'étend facilement à tous les systèmes auxiliaires en général, en y comprenant ceux qui ne se rangent sous aucune des formes générales mentionnées, et dont les ambes, par conséquent, ne constituent pas de système dérivé. En effet, on peut concevoir de tels systèmes auxiliaires comme étant compris sous d'autres formes générales, et l'on peut dire de celles-ci que la valeur de P qui s'y rapporte est $=0$.

Pour faciliter la recherche de la valeur de P qui convient à un système auxiliaire, nous ferons remarquer que l'on peut réunir en une seule la troisième et la quatrième catégorie des systèmes dérivés, puisque la valeur de P est dans l'une et l'autre $=6$. Cette réduction faite, les différentes catégories se distingueront les unes des autres par le nombre d'ambes à éléments égaux renfermés dans les formes générales qui les caractérisent. Or, en faisant attention que les systèmes auxiliaires doivent contenir trois fois chacun des éléments 4, 5, 6, 7, on se convaincra sans difficulté que tout système auxiliaire possédant un ou plusieurs ambes à éléments égaux, se range nécessairement sous une des six formes générales mentionnées, et appartient par conséquent à une des catégories respectives, savoir à celle qui possède le même nombre d'ambes à éléments égaux. Quant aux systèmes auxiliaires qui ne contiennent que des ambes à éléments inégaux, ceux qui se composent des six ambes 45, 46, 47, 56, 57, 67, appartiendront

---

(*) Il est superflu d'ajouter que par l'expression « substituer une permutation à une autre » nous entendons qu'à chaque élément de la seconde soit substitué l'élément de même rang de la première.

évidemment à la forme générale AB, AC, AD, BC, BD, CD, c'est-à-dire, à la première catégorie, tandis que les autres n'appartiennent à aucune et sont par conséquent les seuls dont les ambes ne constituent pas de système dérivé. D'après cela, il nous sera très facile de déterminer la valeur de P relative à un système auxiliaire quelconque. Il n'y a, en effet, qu'à procéder d'après les indications du tableau qui suit:

Cas		P
Point d'ambes à éléments égaux.	1. moins de six ambes différents	0
	2. six ambes différents	1
	3. un ambe à éléments égaux.	2
	4. deux ambes à éléments égaux. . . .	6
	5. trois ambes à éléments égaux	20
	6. quatre ambes à éléments égaux. . .	54

21.

Seconde opération. — Pour désigner un système auxiliaire $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2,\ldots$ applicable à un système d'ambes altérés général $a_1 b_1$, $a_2 b_2,\ldots$ et tenir compte en même temps de l'ordre dans lequel il s'y applique, nous ferons usage de la notation suivante:

$$\frac{a_1 b_1 \quad a_2 b_2 \quad a_3 b_3 \quad a_4 b_4 \quad a_5 b_5 \quad a_6 b_6}{\alpha_1\beta_1 \quad \alpha_2\beta_2 \quad \alpha_3\beta_3 \quad \alpha_4\beta_4 \quad \alpha_5\beta_5 \quad \alpha_6\beta_6}$$

en plaçant les uns sous les autres les ambes correspondants, et en faisant de même de leurs éléments contigus.

Les systèmes auxiliaires ne devant satisfaire qu'à la troisième condition fondamentale, il est nécessaire et il suffit à leur égard, que chacun des éléments 4, 5, 6, 7 se trouve une fois en contact avec chacun des éléments 1, 2, 3 ou a, b, c; c'est-à-dire, d'après notre notation, que chacun des premiers se trouve une fois sous chacun des seconds; ce qui est généralement possible, puisque tous les systèmes d'ambes altérés généraux contiennent quatre fois chacun des éléments a, b, c. Si donc on dénote par $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ des permutations quelconques de 4567, et que l'on en assigne la première aux a, la seconde aux b, la troisième aux c, tout système auxiliaire applicable à un système d'ambes altérés général sera exprimé, selon le cas, par l'un ou l'autre des systèmes généraux que voici :

$$1.\quad \begin{array}{cccccc} aa & aa & bb & bb & cc & cc \\ \hline \alpha\beta & \gamma\delta & \alpha_1\beta_1 & \gamma_1\delta_1 & \alpha_2\beta_2 & \gamma_2\delta_2 \end{array}$$

$$2.\quad \begin{array}{cccccc} aa & aa & bb & cc & bc & bc \\ \hline \alpha\beta & \gamma\delta & \alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \delta_1\delta_2 \end{array}$$

$$3.\quad \begin{array}{cccccc} aa & aa & bc & bc & bc & bc \\ \hline \alpha\beta & \gamma\delta & \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \delta_1\delta_2 \end{array}$$

$$4.\quad \begin{array}{cccccc} aa & bb & cc & ab & ac & bc \\ \hline \alpha\beta & \alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \gamma\gamma_1 & \delta\gamma_2 & \delta_1\delta_2 \end{array}$$

$$5.\quad \begin{array}{cccccc} aa & bb & ac & ac & bc & bc \\ \hline \alpha\beta & \alpha_1\beta_1 & \gamma\alpha_2 & \delta\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \delta_1\delta_2 \end{array}$$

$$6.\quad \begin{array}{cccccc} aa & ab & ac & bc & bc & bc \\ \hline \alpha\beta & \gamma\alpha_1 & \delta\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \delta_1\delta_2 \end{array}$$

$$7.\quad \begin{array}{cccccc} ab & ab & ac & ac & bc & bc \\ \hline \alpha\alpha_1 & \beta\beta_1 & \gamma\alpha_2 & \delta\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \delta_1\delta_2. \end{array}$$

De ces systèmes généraux se déduiront donc les tableaux complets des systèmes auxiliaires, si l'on y substitue successivement toutes les permutations de 4567, tant au lieu de $\alpha\beta\gamma\delta$, qu'au lieu de $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ et de $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$; d'où résulteront en chaque cas $24\cdot24\cdot24$ combinaisons de permutations, et autant de systèmes auxiliaires différents les uns des autres.

Au lieu de procéder de cette manière, on peut aussi substituer d'abord toutes les permutations de $\alpha\beta\gamma\delta$ à $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$; d'où résulteront en chaque cas $24\cdot24$ systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, dans lesquels il s'agirait, en second lieu, de remplacer $\alpha\beta\gamma\delta$ par toutes les permutations de 4567. Mais il est évident que les 24 systèmes auxiliaires qui se déduisent de l'un quelconque de ces systèmes en α, β, γ, δ, sont tous compris sous la même forme générale, savoir sous celle qui comprend ce système lui-même. La valeur de P y sera donc constante, d'où l'on conclut que l'on satisfera à la seconde opération en ne formant, en chaque cas, que le tableau des systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, et en multipliant par 24 le nombre qui en résulte, savoir la somme de tous les P qui s'y rapportent. Ce procédé s'applique indifféremment à tous les systèmes auxiliaires généraux; chacun admet en outre un procédé particulier servant à réduire encore plus le nombre de systèmes auxiliaires à considérer. C'est ce qui résultera de la discussion spéciale des différents cas que nous faisons suivre.

22.

$$1.\ \frac{aa \quad aa \quad bb \quad bb \quad cc \quad cc}{\alpha\beta \quad \gamma\delta \quad \alpha_1\beta_1 \quad \gamma_1\delta_1 \quad \alpha_2\beta_2 \quad \gamma_2\delta_2}.$$

Dans ce cas on peut éviter tout-à-fait la formation du tableau. En effet, puisque tous les ambes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\alpha_1\beta_1$, $\gamma_1\delta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\gamma_2\delta_2$ sont à éléments inégaux, il suffit de considérer les systèmes auxiliaires, dans lesquels ces ambes sont en même temps différents les uns des autres, et sont par conséquent $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$. Cela étant le cas, les ambes $\alpha_1\beta_1$, $\gamma_1\delta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\gamma_2\delta_2$ s'accorderont avec $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$; par conséquent, les ambes qui se rapportent aux deux bb seront ou $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$, ou $\alpha\delta$ et $\beta\gamma$, tandis qu'aux deux cc se rapporteront dans le premier cas $\alpha\delta$ et $\beta\gamma$, dans le second $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$. Quant aux ambes qui se rapportent aux deux bb, il est évidemment permis de les permuter entre eux; de plus, chacun de ces ambes est admissible dans un sens ou dans l'autre; il y a donc $2\cdot2\cdot2=8$ manières différentes de les rapporter aux deux bb, et il y en a évidemment autant de rapporter aux deux cc les deux autres des quatre ambes $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$. On conclut de là que dans chacun des deux cas les systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, que nous avons à considérer, sont au nombre de $8\cdot8=64$. Le nombre total de ces systèmes sera donc $2\cdot64=128$. Pour ce qui est enfin des valeurs de P relatives à ces systèmes, elles y seront constantes, savoir $=1$; le nombre résultant du tableau en α, β, γ, δ sera donc dans le cas actuel $=128$, et l'on aura

$$[1]=24\cdot128=3072.$$

23.

$$2.\ \frac{aa}{\alpha\beta}\ \frac{aa}{\gamma\delta}\ \frac{bb}{\alpha_1\beta_1}\ \frac{cc}{\alpha_2\beta_2}\ \frac{bc}{\gamma_1\gamma_2}\ \frac{bc}{\delta_1\delta_2}.$$

Le rang des éléments α, β, γ, δ étant fixé suivant l'ordre $\alpha\beta\gamma\delta$, soient $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$ et $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$ deux permutations quelconques de $\alpha\beta\gamma\delta$, mais telles que α'_1 soit inférieur en rang à β'_1, γ'_1 inférieur à δ'_1, et α'_2 inférieur à β'_2. Cela admis, le système général que nous avons en vue, se décomposera en huit autres, savoir en

aa	aa	bb	cc	bc	bc
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha'_1\beta'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\gamma'_1\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha'_1\beta'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\delta'_1\gamma'_2$	$\gamma'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha'_1\beta'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\gamma'_1\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha'_1\beta'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\delta'_1\gamma'_2$	$\gamma'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\beta'_1\alpha'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\gamma'_1\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\beta'_1\alpha'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\delta'_1\gamma'_2$	$\gamma'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\beta'_1\alpha'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\gamma'_1\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\beta'_1\alpha'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\delta'_1\gamma'_2$	$\gamma'_1\delta'_2$

dans chacun desquels les permutations $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$ et $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$ devront être remplacées successivement par toutes leurs valeurs, c'est-à-dire, par toutes les permutations de $\alpha\beta\gamma\delta$, compatibles avec les restrictions établies; valeurs qui sont:

$\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$	$\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$	
$\alpha\beta\gamma\delta$	$\alpha\beta\gamma\delta$	$\beta\gamma\alpha\delta$
$\alpha\gamma\beta\delta$	$\alpha\beta\delta\gamma$	$\beta\gamma\delta\alpha$
$\alpha\delta\beta\gamma$	$\alpha\gamma\beta\delta$	$\beta\delta\alpha\gamma$
$\beta\gamma\alpha\delta$	$\alpha\gamma\delta\beta$	$\beta\delta\gamma\alpha$
$\beta\delta\alpha\gamma$	$\alpha\delta\beta\gamma$	$\gamma\delta\alpha\beta$
$\gamma\delta\alpha\beta$	$\alpha\delta\gamma\beta$	$\gamma\delta\beta\alpha$

On peut ici remarquer que la permutation $\alpha'_2\beta'_2\delta'_2\gamma'_2$ a les mêmes valeurs que $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$; il est donc permis de permuter entre eux γ'_2 et δ'_2, ce que nous ferons dans chacun des huit systèmes où γ'_1 et δ'_1 ont changé de place; par suite de quoi tous ces systèmes se trouveront composés des mêmes ambes. On en conclut que les systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, qui se déduisent de deux quelconques des huit systèmes, sont respectivement compris sous les mêmes formes générales. La quantité P y présentera par conséquent la même suite de valeurs, ce qui nous permet de ne former que le tableau déduit d'un seul, p. e. du premier, sauf à multiplier par 8 le nombre qui en résulte. Par là, le nombre des systèmes en α, β, γ, δ que nous avons à considérer, se trouve réduit de $24 \cdot 24$ à $6 \cdot 12$; réduction que l'on poussera encore plus loin, si l'on a recours aux considérations suivantes:

En fixant les valeurs des ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$, et en admettant de plus que γ_1 soit inférieur à δ_1, on détermine en même temps deux systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ qui sont, en se servant de la notation générale:

aa	aa	bb	cc	bc	bc
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma_1\gamma_2$	$\delta_1\delta_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma_1\delta_2$	$\delta_1\gamma_2$

et que nous désignerons en conséquence par $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$; le premier ambe étant supposé correspondre à bb, le second à cc. Si les ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ sont bien ordonnés, c'est-à-dire, si les éléments inferieurs y occupent le premier rang, les systèmes $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ appartiendront au tableau qui se déduit du premier des huit systèmes généraux énumérés ci-dessus. Ce tableau se partage par conséquent, en 36 groupes qui résultent de $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ en y mettant successivement $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ tant à la place de $\alpha_1\beta_1$ qu'à celle de $\alpha_2\beta_2$.

Si dans un de ces groupes on remplace $\alpha\beta\gamma\delta$ par une quelconque de ses permutations, il se transformera en deux autres systèmes respectivement compris sous les mêmes formes générales. Or, les ambes $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ ne changeront que d'ordre, si l'on y permute soit α et β, soit γ et δ, soit que l'on y permute simultanément α et γ, β et δ. Si donc on admet que la permutation substituée à $\alpha\beta\gamma\delta$ soit le résultat d'un ou de plusieurs de ces changements, et qu'elle transforme $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ respectivement en $\alpha''_1\beta''_1\gamma''_1\delta''_1$ et $\alpha''_2\beta''_2\gamma''_2\delta''_2$, les deux systèmes transformés se composeront, abstraction faite de l'ordre, des ambes

$$\alpha\beta \quad \gamma\delta \quad \alpha''_1\beta''_1 \quad \alpha''_2\beta''_2 \quad \gamma''_1\gamma''_2 \quad \delta''_1\delta''_2$$

et

$$\alpha\beta \quad \gamma\delta \quad \alpha''_1\beta''_1 \quad \alpha''_2\beta''_2 \quad \gamma''_1\delta''_2 \quad \delta''_1\gamma''_2$$

qui, comme on le voit, sont en même temps ceux qui constituent le groupe de systèmes $(\alpha''_1\beta''_1,\ \alpha''_2\beta''_2)$, ce qui ne cessera pas d'avoir lieu, si l'on écrit les ambes $\alpha''_1\beta''_1$ et $\alpha''_2\beta''_2$ de manière qu'ils soient bien ordonnés. Dans ce cas le groupe $(\alpha''_1\beta''_1,\ \alpha''_2\beta''_2)$ appartiendra, ainsi que $(\alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2)$, au tableau déduit du premier des huit systèmes, et il sera permis dans la recherche qui nous occupe, de remplacer l'un par l'autre; les systèmes qui les composent, étant respectivement compris sous les mêmes formes générales. Or, en examinant sous ce point de vue les 36 groupes qui viennent ici en question, on trouve le tableau suivant, dans lequel les substitutions se rapportent au premier groupe de chaque ligne:

				α et γ, β et δ			
	α et β	γ et δ	α et β, γ et δ	seuls	α et β	γ et δ	α et β, γ et δ
$(\alpha\beta,\ \alpha\beta)$				$(\gamma\delta,\ \gamma\delta)$			
$(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$	$(\alpha\beta,\ \beta\gamma)$	$(\alpha\beta,\ \alpha\delta)$	$(\alpha\beta,\ \beta\delta)$	$(\gamma\delta,\ \alpha\gamma)$	$(\gamma\delta,\ \beta\gamma)$	$(\gamma\delta,\ \alpha\delta)$	$(\gamma\delta,\ \beta\delta)$
$(\alpha\beta,\ \gamma\delta)$				$(\gamma\delta,\ \alpha\beta)$			
$(\alpha\gamma,\ \alpha\beta)$	$(\beta\gamma,\ \alpha\beta)$	$(\alpha\delta,\ \alpha\beta)$	$(\beta\delta,\ \alpha\beta)$	$(\alpha\gamma,\ \gamma\delta)$	$(\beta\gamma,\ \gamma\delta)$	$(\alpha\delta,\ \gamma\delta)$	$(\beta\delta,\ \gamma\delta)$
$(\alpha\gamma,\ \alpha\gamma)$	$(\beta\gamma,\ \beta\gamma)$	$(\alpha\delta,\ \alpha\delta)$	$(\beta\delta,\ \beta\delta)$				
$(\alpha\gamma,\ \alpha\delta)$	$(\beta\gamma,\ \beta\delta)$	$(\alpha\delta,\ \alpha\gamma)$	$(\beta\delta,\ \beta\gamma)$	$(\alpha\gamma,\ \beta\gamma)$	$(\beta\gamma,\ \alpha\gamma)$	$(\alpha\delta,\ \beta\delta)$	$(\beta\delta,\ \alpha\delta)$
$(\alpha\gamma,\ \beta\delta)$	$(\beta\gamma,\ \alpha\delta)$	$(\alpha\delta,\ \beta\gamma)$	$(\beta\delta,\ \alpha\gamma)$				

Il suffit donc de prendre

2	fois	le groupe	$(\alpha\beta,\ \alpha\beta)$	4	fois	le groupe	$(\alpha\gamma,\ \alpha\gamma)$
8	»	»	$(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$	8	»	»	$(\alpha\gamma,\ \alpha\delta)$
2	»	»	$(\alpha\beta,\ \gamma\delta)$	4	»	»	$(\alpha\gamma,\ \beta\delta)$;
8	»	»	$(\alpha\gamma,\ \alpha\beta)$				

il est de plus aisé de voir que les systèmes formant les groupes $(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$ et $(\alpha\gamma,\ \alpha\beta)$ se composent respectivement des mêmes ambes; on peut donc remplacer le second groupe par le premier; par suite de quoi le tableau qui se déduit du premier des huit systèmes généraux prendra la forme

	aa	aa	bb	cc	bc	bc	cas	P
$2\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\delta$	1	0
$16\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	1	0
$2\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	1	0

	aa	aa	bb	cc	bc	bc	cas	P
$4\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\beta\beta$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\delta\beta$	1	0
$8\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\gamma$	$\delta\beta$	2	1
$4\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\beta\alpha$	$\delta\gamma$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\beta\gamma$	$\delta\alpha$	2	1

le nombre qui en résulte est donc

$$2\cdot 6+16\cdot 2+4\cdot 6+8\cdot 3+4\cdot 1=96;$$

par conséquent le nombre qui résulte du tableau complet en α, β, γ, δ est $=8\cdot 96=768$, et l'on trouve

$$[2]=24\cdot 768=18432.$$

24.

$$3.\ \begin{array}{cccccc} aa & aa & bc & bc & bc & bc \\ \hline \alpha\beta & \gamma\delta & \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \delta_1\delta_2 \end{array}$$

De ce système général se déduisent 24 systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, si l'on y substitue successivement toutes les permutations de $\alpha\beta\gamma\delta$ au lieu de $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$, tandis que $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ conserve la même valeur, soit $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$. Les éléments α'_1, β'_1, γ'_1, δ'_1, n'étant autres, à l'ordre près, que α, β, γ, δ, il en sera de même des systèmes d'ambes $\alpha'_1\alpha_2$, $\beta'_1\beta_2$, $\gamma'_1\gamma_2$, $\delta'_1\delta_2$ et $\alpha\alpha'_2$, $\beta\beta'_2$, $\gamma\gamma'_2$, $\delta\delta'_2$, si l'on désigne par α'_2 celui des éléments α_2, β_2, γ_2, δ_2 qui dans le premier système se trouve combiné avec α, par β'_2 celui qui s'y trouve combiné avec β, et ainsi de suite. Il s'ensuit de là que les 24 systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ desquels nous venons de parler se composent respectivement des mêmes ambes que les systèmes d'ambes que l'on déduit de

$$\alpha\beta,\quad \gamma\delta,\quad \alpha\alpha'_2,\quad \beta\beta'_2,\quad \gamma\gamma'_2,\quad \delta\delta'_2$$

en y remplaçant $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$ par toutes les permutations de $\alpha\beta\gamma\delta$. Or, ces derniers systèmes ne varient pas, quelle que soit la permutation $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$; ils ne varieront donc non plus, quelle que soit la permutation $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$ de laquelle la première dépend. On en conclut que les 24 systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ relatifs à une valeur quelconque de $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ se composent respectivement des mêmes ambes que ceux qui se rapportent à toute autre; à plus forte raison, les uns seront respectivement compris sous les mêmes formes générales que les autres. Il suffit, par conséquent, de former le tableau de ceux qui se rapportent à une seule valeur de $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, p. e. à $\alpha\beta\gamma\delta$, et de multiplier par 24 le nombre qui en résulte. Ce tableau étant

aa	aa	bc	bc	bc	bc	cas	P	aa	aa	bc	bc	bc	bc	cas	P
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	6	54	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	3	2
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	4	6	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	1	0
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	4	6	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	4	6
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	3	2	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	3	2
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	3	2	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	1	0
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	4	6	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	2	1
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	1	0
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	1	0	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	3	2
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	3	2	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\delta$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	3	2
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	1	0	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\delta$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	4	6
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	1	0	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\delta$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	2	1
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	3	2	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\delta$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	1	0

le nombre qui en résulte sera $=108$; celui qui résulte du tableau complet en α, β, γ, δ sera donc $=24\cdot 108$, et l'on aura

$$[3]=24\cdot 24\cdot 108=62208.$$

25.

$$4. \frac{aa \quad bb \quad cc \quad ab \quad ac \quad bc}{\alpha\beta \quad \alpha_1\beta_1 \quad \alpha_2\beta_2 \quad \gamma\gamma_1 \quad \delta\gamma_2 \quad \delta_1\delta_2}$$

Ce système général se décompose en quatre autres, savoir en

aa	bb	cc	ab	ac	bc
$\alpha\beta$	$\alpha'_1\beta'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\gamma\gamma'_1$	$\delta\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\alpha'_1\beta'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\gamma\gamma'_1$	$\delta\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\beta'_1\alpha'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\gamma\gamma'_1$	$\delta\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\beta'_1\alpha'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\gamma\gamma'_1$	$\delta\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$

où $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$ et $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$ sont des permutations quelconques de $\alpha\beta\gamma\delta$, mais telles que α'_1 soit inférieur à β'_1, α'_2 inférieur à β'_2. Ces systèmes étant composés des mêmes ambes, on conclut, comme dans le second cas (art. 23), qu'il suffit d'un seul, p. e. du premier, pour former le tableau α, β; γ, δ, sauf à multiplier par 4 le nombre qui en résulte.

En fixant les valeurs des ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$, on détermine en même temps quatre systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, qui sont

aa	bb	cc	ab	ac	bc
$\alpha\beta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma\gamma_1$	$\delta\gamma_2$	$\delta_1\delta_2$
$\alpha\beta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma\gamma_1$	$\delta\delta_2$	$\delta_1\gamma_2$
$\alpha\beta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma\delta_1$	$\delta\gamma_2$	$\gamma_1\delta_2$
$\alpha\beta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma\delta_1$	$\delta\delta_2$	$\gamma_1\gamma_2$

et que nous désignerons par $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$. Si l'on permute ici réciproquement soit α et β, soit γ et δ, et que les ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ se transforment dans le premier cas en $\alpha''_1\beta''_1$ et $\alpha''_2\beta''_2$, dans le second en $\alpha'''_1\beta'''_1$ et $\alpha'''_2\beta'''_2$, on sera autorisé à remplacer par $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ tant $(\alpha''_1\beta''_1, \alpha''_2\beta''_2)$ que $(\alpha'''_2\beta'''_2, \alpha'''_1\beta'''_1)$, groupe qu'il ne faut pas confondre avec $(\alpha'''_1\beta'''_1, \alpha'''_2\beta'''_2)$. Ces propositions se démontrent à l'aide de raisonnements déjà employés, et que l'on suppléera aisément. Nous ajouterons qu'il est permis d'écrire les ambes $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha''_1\beta''_1$, $\alpha''_2\beta''_2$, $\alpha'''_1\beta'''_1$, $\alpha'''_2\beta'''_2$ de manière qu'ils soient bien ordonnés; par suite de quoi les groupes $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$, $(\alpha''_1\beta''_1, \alpha''_2\beta''_2)$, $(\alpha'''_2\beta'''_2, \alpha'''_1\beta'''_1)$ appartiendront tous les trois au tableau qui se déduit du premier des quatre systèmes généraux. Il s'ensuit de là que les groupes desquels ce tableau est composé, se présenteront dans l'ordre suivant, si l'on place sur la même ligne ceux que l'on peut remplacer entre eux:

	α et β	γ et δ	α et β, γ et δ
$(\alpha\beta,\ \alpha\beta)$			
$(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$	$(\alpha\beta,\ \beta\gamma)$	$(\alpha\delta,\ \alpha\beta)$	$(\beta\delta,\ \alpha\beta)$
$(\alpha\beta,\ \alpha\delta)$	$(\alpha\beta,\ \beta\delta)$	$(\alpha\gamma,\ \alpha\beta)$	$(\beta\gamma,\ \alpha\beta)$
$(\alpha\beta,\ \gamma\delta)$		$(\gamma\delta,\ \alpha\beta)$	
$(\alpha\gamma,\ \alpha\gamma)$	$(\beta\gamma,\ \beta\gamma)$	$(\alpha\delta,\ \alpha\delta)$	$(\beta\delta,\ \beta\delta)$
$(\alpha\gamma,\ \alpha\delta)$	$(\beta\gamma,\ \beta\delta)$		
$(\alpha\gamma,\ \beta\gamma)$	$(\beta\gamma,\ \alpha\gamma)$	$(\beta\delta,\ \alpha\delta)$	$(\alpha\delta,\ \beta\delta)$
$(\alpha\gamma,\ \beta\delta)$	$(\beta\gamma,\ \alpha\delta)$		
$(\alpha\gamma,\ \gamma\delta)$	$(\beta\gamma,\ \gamma\delta)$	$(\gamma\delta,\ \alpha\delta)$	$(\gamma\delta,\ \beta\delta)$
$(\alpha\delta,\ \alpha\gamma)$	$(\beta\delta,\ \beta\gamma)$		
$(\alpha\delta,\ \beta\gamma)$	$(\beta\delta,\ \alpha\gamma)$		
$(\alpha\delta,\ \gamma\delta)$	$(\beta\delta,\ \gamma\delta)$	$(\gamma\delta,\ \alpha\gamma)$	$(\gamma\delta,\ \beta\gamma)$
$(\gamma\delta,\ \gamma\delta)$			

D'après cela, il suffit de prendre

1	fois le	groupe	$(\alpha\beta,\ \alpha\beta)$	2	fois le	groupe	$(\alpha\gamma,\ \beta\delta)$
4	»	»	$(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$	4	»	»	$(\alpha\gamma,\ \gamma\delta)$
4	»	»	$(\alpha\beta,\ \alpha\delta)$	2	»	»	$(\alpha\delta,\ \alpha\gamma)$
2	»	»	$(\alpha\beta,\ \gamma\delta)$	2	»	»	$(\alpha\delta,\ \beta\gamma)$
4	»	»	$(\alpha\gamma,\ \alpha\gamma)$	4	»	»	$(\alpha\delta,\ \gamma\delta)$
2	»	»	$(\alpha\gamma,\ \alpha\delta)$	1	»	»	$(\gamma\delta,\ \gamma\delta)$
4	»	»	$(\alpha\gamma,\ \beta\gamma)$				

ce qui nous conduit au tableau

	aa	bb	cc	ab	ac	bc	cas	P
1×	αβ	αβ	αβ	γγ	δγ	δδ	4	6
	αβ	αβ	αβ	γγ	δδ	δγ	4	6
	αβ	αβ	αβ	γδ	δγ	γδ	1	0
	αβ	αβ	αβ	γδ	δδ	γγ	4	6
4×	αβ	αβ	αγ	γγ	δβ	δδ	4	6
	αβ	αβ	αγ	γγ	δδ	δβ	4	6
	αβ	αβ	αγ	γδ	δβ	γδ	1	0
	αβ	αβ	αγ	γδ	δδ	γβ	3	2
4×	αβ	αβ	αδ	γγ	δβ	δγ	3	2
	αβ	αβ	αδ	γγ	δγ	δβ	3	2
	αβ	αβ	αδ	γδ	δβ	γγ	3	2
	αβ	αβ	αδ	γδ	δγ	γβ	1	0
2×	αβ	αβ	γδ	γγ	δα	δβ	3	2
	αβ	αβ	γδ	γγ	δβ	δα	3	2
	αβ	αβ	γδ	γδ	δα	γβ	1	0
	αβ	αβ	γδ	γδ	δβ	γα	1	0
4×	αβ	αγ	αγ	γβ	δβ	δδ	3	2
	αβ	αγ	αγ	γβ	δδ	δβ	3	2
	αβ	αγ	αγ	γδ	δβ	βδ	1	0
	αβ	αγ	αγ	γδ	δδ	ββ	4	6
2×	αβ	αγ	αδ	γβ	δβ	δγ	2	1
	αβ	αγ	αδ	γβ	δγ	δβ	2	1
	αβ	αγ	αδ	γδ	δβ	βγ	2	1
	αβ	αγ	αδ	γδ	δγ	ββ	3	2
4×	αβ	αγ	βγ	γβ	δα	δδ	3	2
	αβ	αγ	βγ	γβ	δδ	δα	3	2
	αβ	αγ	βγ	γδ	δα	βδ	2	1
	αβ	αγ	βγ	γδ	δδ	βα	3	2

	aa	bb	cc	ab	ac	bc	cas	P
2×	αβ	αγ	βδ	γβ	δα	δγ	2	1
	αβ	αγ	βδ	γβ	δγ	δα	2	1
	αβ	αγ	βδ	γδ	δα	βγ	2	1
	αβ	αγ	βδ	γδ	δγ	βα	1	0
4×	αβ	αγ	γδ	γβ	δα	δβ	2	1
	αβ	αγ	γδ	γβ	δβ	δα	2	1
	αβ	αγ	γδ	γδ	δα	ββ	3	2
	αβ	αγ	γδ	γδ	δβ	βα	1	0
2×	αβ	αδ	αγ	γβ	δβ	γδ	2	1
	αβ	αδ	αγ	γβ	δδ	γβ	3	2
	αβ	αδ	αγ	γγ	δβ	βδ	3	2
	αβ	αδ	αγ	γγ	δδ	ββ	5	20
2×	αβ	αδ	βγ	γβ	δα	γδ	1	0
	αβ	αδ	βγ	γβ	δδ	γα	3	2
	αβ	αδ	βγ	γγ	δα	βδ	3	2
	αβ	αδ	βγ	γγ	δδ	βα	4	6
4×	αβ	αδ	γδ	γβ	δα	γβ	1	0
	αβ	αδ	γδ	γβ	δβ	γα	2	1
	αβ	αδ	γδ	γγ	δα	ββ	4	6
	αβ	αδ	γδ	γγ	δβ	βα	3	2
1×	αβ	γδ	γδ	γα	δα	ββ	3	2
	αβ	γδ	γδ	γα	δβ	βα	1	0
	αβ	γδ	γδ	γβ	δα	αβ	1	0
	αβ	γδ	γδ	γβ	δβ	αα	3	2

duquel résulte le nombre

$$1\cdot 18+4\cdot 14+4\cdot 6+2\cdot 4+4\cdot 10+2\cdot 5+4\cdot 7+2\cdot 3+4\cdot 4+2\cdot 25+2\cdot 10+4\cdot 9+1\cdot 4=316,$$

et par suite

$$[4]=24\cdot 4\cdot 316=30336.$$

26.

	aa	bb	ac	ac	bc	bc
5.	$\alpha\beta$	$\alpha_1\beta_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\gamma_1\gamma_2$	$\delta_1\delta_2$

Nous substituerons à ce système général le suivant:

aa	bb	ac	ac	bc	bc
$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma_1\alpha$	$\delta_1\beta$	$\gamma_2\gamma$	$\delta_2\delta$

qui remplit évidemment le même but, et qui se décompose en quatre autres, savoir en

aa	bb	ac	ac	bc	bc
$\alpha'_1\beta'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\gamma'_1\alpha$	$\delta'_1\beta$	$\gamma'_2\gamma$	$\delta'_2\delta$
$\alpha'_1\beta'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\gamma'_1\alpha$	$\delta'_1\beta$	$\gamma'_2\gamma$	$\delta'_2\delta$
$\beta'_1\alpha'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\gamma'_1\alpha$	$\delta'_1\beta$	$\gamma'_2\gamma$	$\delta'_2\delta$
$\beta'_1\alpha'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\gamma'_1\alpha$	$\delta'_1\beta$	$\gamma'_2\gamma$	$\delta'_2\delta$

où $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$ et $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$ sont des permutations quelconques de $\alpha\beta\gamma\delta$, dans lesquelles α'_1 est inférieur à β'_1, α'_2 inférieur à β'_2. Ces systèmes étant composés des mêmes ambes, il suffit de former le tableau en α, β, γ, δ, qui se déduit du premier, et de multiplier par 4 le nombre qui en résulte.

En désignant généralement par $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ les systèmes en α, β, γ, δ, dans lesquels les ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ ont respectivement les mêmes valeurs, savoir:

aa	bb	ac	ac	bc	bc
$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_1\alpha$	$\beta_1\beta$	$\alpha_2\gamma$	$\beta_2\delta$
$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_1\alpha$	$\beta_1\beta$	$\beta_2\gamma$	$\alpha_2\delta$
$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\beta_1\alpha$	$\alpha_1\beta$	$\alpha_2\gamma$	$\beta_2\delta$
$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\beta_1\alpha$	$\alpha_1\beta$	$\beta_2\gamma$	$\alpha_2\delta$

on constatera facilement les propositions suivantes:

1.° En permutant soit α et β, soit γ et δ, et en admettant que par suite d'un de ces changements ou de tous les deux, les ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ se transforment en $\alpha''_1\beta''_1$ et $\alpha''_2\beta''_2$, il est permis de remplacer l'un par l'autre les groupes $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ et $(\alpha''_1\beta''_1, \alpha''_2\beta''_2)$.

2.° Si, en permutant simultanément α et γ, β et δ, les ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ se transforment en $\alpha'''_1\beta'''_1$ et $\alpha'''_2\beta'''_2$, il est permis de remplacer l'un par l'autre les groupes $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ et $(\alpha'''_2\beta'''_2, \alpha'''_1\beta'''_1)$.

Les ambes $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha''_1\beta''_1$, $\alpha''_2\beta''_2$, $\alpha'''_1\beta'''_1$, $\alpha'''_2\beta'''_2$, étant bien ordonnés, le groupe $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ ainsi que les groupes transformés appartiendront au tableau qui se déduit du premier des quatre systèmes généraux, et les groupes desquels ce tableau est composé se présenteront dans l'ordre suivant, indiquant ceux que l'on peut remplacer les uns par les autres:

				α et γ, β et δ			
	α et β	γ et δ	α et β, γ et δ	seuls	α et β	γ et δ	α et β, γ et δ
$(\alpha\beta, \alpha\beta)$				$(\gamma\delta, \gamma\delta)$			
$(\alpha\beta, \alpha\gamma)$	$(\alpha\beta, \beta\gamma)$	$(\alpha\beta, \alpha\delta)$	$(\alpha\beta, \beta\delta)$	$(\alpha\gamma, \gamma\delta)$	$(\beta\gamma, \gamma\delta)$	$(\alpha\delta, \gamma\delta)$	$(\beta\delta, \gamma\delta)$
$(\alpha\beta, \gamma\delta)$							
$(\alpha\gamma, \alpha\beta)$	$(\beta\gamma, \alpha\beta)$	$(\alpha\delta, \alpha\beta)$	$(\beta\delta, \alpha\beta)$	$(\gamma\delta, \alpha\gamma)$	$(\gamma\delta, \beta\gamma)$	$(\gamma\delta, \alpha\delta)$	$(\gamma\delta, \beta\delta)$
$(\alpha\gamma, \alpha\gamma)$	$(\beta\gamma, \beta\gamma)$	$(\alpha\delta, \alpha\delta)$	$(\beta\delta, \beta\delta)$				
$(\alpha\gamma, \alpha\delta)$	$(\beta\gamma, \beta\delta)$	$(\alpha\delta, \alpha\gamma)$	$(\beta\delta, \beta\gamma)$	$(\beta\gamma, \alpha\gamma)$	$(\alpha\gamma, \beta\gamma)$	$(\beta\delta, \alpha\delta)$	$(\alpha\delta, \beta\delta)$
$(\alpha\gamma, \beta\delta)$	$(\beta\gamma, \alpha\delta)$	$(\alpha\delta, \beta\gamma)$	$(\beta\delta, \alpha\gamma)$				
$(\gamma\delta, \alpha\beta)$							

Il suffit donc de prendre

2 fois	le groupe	$(\alpha\beta, \alpha\beta)$		4 fois	le groupe	$(\alpha\gamma, \alpha\gamma)$
8 »	»	$(\alpha\beta, \alpha\gamma)$		8 »	»	$(\alpha\gamma, \alpha\delta)$
1 »	»	$(\alpha\beta, \gamma\delta)$		4 »	»	$(\alpha\gamma, \beta\delta)$
8 »	»	$(\alpha\gamma, \alpha\beta)$		1 »	»	$(\gamma\delta, \alpha\beta)$

par conséquent, le tableau à former est celui-ci:

	aa	*bb*	*ac*	*ac*	*bc*	*bc*	cas	*P*
2×	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	1	0
8×	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\delta\gamma$	$\beta\delta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	$\beta\delta$	2	1
1×	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\alpha\delta$	2	1
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	2	1
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\beta\gamma$	$\alpha\delta$	1	0
8×	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	1	0
	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	5	20
	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	3	2

	aa	*bb*	*ac*	*ac*	*bc*	*bc*	cas	*P*
4×	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\delta\gamma$	$\beta\delta$	1	0
	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	$\beta\delta$	3	2
8×	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	2	1
	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	$\beta\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\beta\delta$	4	6
4×	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	1	0
	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	$\alpha\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\alpha\delta$	4	6
1×	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	6	54
	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	4	6
	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\alpha\beta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	1	0

le nombre qui en résulte est donc =

$$2\cdot 12+8\cdot 5+1\cdot 2+8\cdot 28+4\cdot 10+8\cdot 11+4\cdot 10+1\cdot 66=524,$$

et il vient

$$[5]=24\cdot 4\cdot 524=50304.$$

27.

$$6.\ \frac{aa \quad ab \quad ac \quad bc \quad bc \quad bc}{\alpha\beta \quad \gamma\alpha_1 \quad \delta\alpha_2 \quad \beta_1\beta_2 \quad \gamma_1\gamma_2 \quad \delta_1\delta_2}$$

De ce système général se déduisent six systèmes auxiliaires en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, si l'on fixe les valeurs de α_1 et de α_2, et qu'on donne successivement toutes ses valeurs à la permutation $\beta_2\gamma_2\delta_2$, tandisque la permutation $\beta_1\gamma_1\delta_1$ reste la même. Or, il serait facile de démontrer (comparez le cas analogue, art. 24), que ces systèmes, ordonnés convenablement, ne cesseront pas d'être composés des mêmes ambes, si l'on remplace $\beta_1\gamma_1\delta_1$ par une quelconque de ses permutations. On conclut de là sans difficulté la proposition suivante:

En désignant par (α_1, α_2) les six systèmes auxiliaires mentionnés, relatifs à une valeur déterminée de $\beta_1\gamma_1\delta_1$, valeur que nous supposerons être telle que son premier élément soit inférieur au second, le second inférieur au troisième, il suffit d'employer à la formation du tableau en α, β, γ, δ les seize groupes qui se déduisent de (α_1, α_2) en y substituant successivement α, β, γ, δ, tant au lieu de α_1 que de α_2; sauf à multiplier par 6 le nombre résultant de ce tableau.

Il n'est pas moins aisé de constater cette autre proposition:

En permutant soit α et β, soit γ et δ, et en admettant que α_1 et α_2 se transforment dans le premier cas en α'_1 et α'_2, dans le second en α''_1 et α''_2, il est permis de remplacer par (α_1, α_2) l'un et l'autre des groupes (α'_1, α'_2) et (α''_2, α''_1).

En examinant sous ce point de vue les seize groupes que nous avons à considérer, ils se rangeront dans l'ordre suivant:

	α et β	γ et δ	α et β γ et δ
(α, α)	(β, β)		
(α, β)	(β, α)		
(α, γ)	(β, γ)	(δ, α)	(δ, β)
(α, δ)	(β, δ)	(γ, α)	(γ, β)
(γ, γ)		(δ, δ)	
(γ, δ)			
(δ, γ)			

Il suffit donc de prendre

2	fois le groupe		(α, α)	2	fois le groupe		(γ, γ)
2	»	»	(α, β)	1	»	»	(γ, δ)
4	»	»	(α, γ)	1	»	»	(δ, γ)
4	»	»	(α, δ)				

On se convaincra de plus sans peine qu'en permutant β et γ dans les systèmes (α, γ), ils se transformeront en d'autres respectivement composés des mêmes ambes que les systèmes (α, β); on est donc autorisé à remplacer le premier groupe par le dernier; par conséquent, le tableau en question prendra la forme suivante:

	aa	ab	ac	bc	bc	bc	cas	P
$2\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	5	20
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	2	1
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	2	1
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	3	2
$6\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	2	1
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	3	2
$4\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	5	20
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	3	2

	aa	ab	ac	bc	bc	bc	cas	P
$2\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\delta$	6	54
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\alpha\alpha$	$\beta\delta$	$\delta\beta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\alpha\beta$	$\beta\delta$	$\delta\alpha$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\beta$	$\delta\alpha$	4	6
$1\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	6	54
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\delta\beta$	5	20
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\alpha$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\beta$	$\delta\alpha$	5	20
$1\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\alpha\alpha$	$\beta\delta$	$\gamma\beta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\delta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\alpha\beta$	$\beta\delta$	$\gamma\alpha$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	3	2

le nombre qui en résulte est donc =

$$2\cdot 28 + 6\cdot 11 + 4\cdot 38 + 2\cdot 76 + 1\cdot 112 + 1\cdot 10 = 548,$$

et l'on trouve

$$[6] = 24\cdot 6\cdot 548 = 78912.$$

28.

$$7.\ \frac{ab \quad ab \quad ac \quad ac \quad bc \quad bc}{\alpha\alpha_1 \quad \beta\beta_1 \quad \gamma\alpha_2 \quad \delta\beta_2 \quad \gamma_1\gamma_2 \quad \delta_1\delta_2}$$

En admettant γ'_1, inférieur à δ'_1, ce système général se décompose en deux autres, savoir en

ab	ab	ac	ac	bc	bc
$\alpha\alpha_1$	$\beta\beta_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\gamma'_1\gamma_2$	$\delta'_1\delta_2$
$\alpha\alpha_1$	$\beta\beta_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\delta'_1\gamma_2$	$\gamma'_1\delta_2$

dont le second comprendra les mêmes ambes que le premier, si l'on y permute γ_2 et δ_2, ce qu'il est évidemment permis de faire. Nous nous bornerons, en conséquence, à former le tableau en α, β, γ, δ, qui se déduit du premier de ces deux systèmes, et à multiplier par 2 le nombre qui en résulte. À ce tableau appartiendront les huits systèmes

ab	ab	ac	ac	bc	bc
$\alpha\alpha_1$	$\beta\beta_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\gamma'_1\gamma_2$	$\delta'_1\delta_2$
$\alpha\alpha_1$	$\beta\beta_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\gamma'_1\delta_2$	$\delta'_1\gamma_2$
$\alpha\alpha_1$	$\beta\beta_1$	$\gamma\beta_2$	$\delta\alpha_2$	$\gamma'_1\gamma_2$	$\delta'_1\delta_2$
$\alpha\alpha_1$	$\beta\beta_1$	$\gamma\beta_2$	$\delta\alpha_2$	$\gamma'_1\delta_2$	$\delta'_1\gamma_2$
$\alpha\beta_1$	$\beta\alpha_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\gamma'_1\gamma_2$	$\delta'_1\delta_2$
$\alpha\beta_1$	$\beta\alpha_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\gamma'_1\delta_2$	$\delta'_1\gamma_2$
$\alpha\beta_1$	$\beta\alpha_1$	$\gamma\beta_2$	$\delta\alpha_2$	$\gamma'_1\gamma_2$	$\delta'_1\delta_2$
$\alpha\beta_1$	$\beta\alpha_1$	$\gamma\beta_2$	$\delta\alpha_2$	$\gamma'_1\delta_2$	$\delta'_1\gamma_2$

si l'on fixe les valeurs de α_1 et de β_1, ainsi que de α_2 et de β_2. Ils sont de plus les seuls qui se rapportent à ces valeurs fixes; nous les désignerons donc par $(\alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2)$, notation dans laquelle il est permis de permuter soit α_1 et β_1, soit α_2 et β_2; puisque par là les huit systèmes ne changeront que d'ordre.

En admettant que les ambes $\alpha''_1\beta''_1$ et $\alpha''_2\beta''_2$, ainsi que $\alpha'''_1\beta'''_1$ et $\alpha'''_2\beta'''_2$ aient ici la même signification que dans l'art. 26, c'est-à-dire, qu'ils résultent de $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ par suite des mêmes substitutions, on se convaincra sans difficulté que dans le cas actuel comme dans le cas cité, on est autorisé à remplacer par $(\alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2)$ l'un et l'autre des groupes $(\alpha''_1\beta''_1,\ \alpha''_2\beta''_2)$ et $(\alpha'''_2\beta'''_2,\ \alpha'''_1\beta'''_1)$. On aboutira donc à la même conclusion par rapport à la formation du tableau. Or, on vérifiera aisément: 1.° que les systèmes $(\alpha\beta,\ \gamma\delta)$ se composent respectivement des mêmes ambes que les systèmes $(\alpha\beta,\ \alpha\beta)$; 2.° qu'en permutant α et δ dans les systèmes $(\alpha\gamma,\ \alpha\gamma)$, ils se transformeront en d'autres composés respectivement des mêmes ambes que les systèmes $(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$; 3.° qu'il en sera de même des systèmes $(\alpha\gamma,\ \beta\delta)$ vis-à-vis des systèmes $(\alpha\gamma,\ \alpha\beta)$; 4.° que les systèmes $(\gamma\delta,\ \alpha\beta)$ peuvent être négligés, puisqu'ils ne contiennent que des ambes à éléments inégaux parmi lesquels $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ ne se rencontrent pas, de sorte que la quantité P y est généralement $=0$. Tous ces points considérés, on voit qu'il suffit de prendre:

3 fois le groupe	$(\alpha\beta,\ \alpha\beta)$	12 fois le groupe	$(\alpha\gamma,\ \alpha\beta)$
12 » »	$(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$	8 » »	$(\alpha\gamma,\ \alpha\delta)$

ce qui nous conduit au tableau suivant:

	ab	ab	ac	ac	bc	bc	cas	P
$3\times$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	6	54
	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	6	54
	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	1	0
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	1	0
$12\times$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	5.	20
	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	4	6
	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	6	54
	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	5	20
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	3	2

	ab	ab	ac	ac	bc	bc	cas	P
$12\times$	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\delta$	$\delta\gamma$	3	2
	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\beta\delta$	$\delta\gamma$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\delta$	$\delta\gamma$	1	0
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\beta\delta$	$\delta\gamma$	2	1
$8\times$	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	5	20
	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\gamma$	$\delta\beta$	4	6
	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	$\delta\beta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\gamma$	$\delta\beta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	$\delta\beta$	2	1

Le nombre qui en résulte étant =

$$3 \cdot 132 + 12 \cdot 110 + 12 \cdot 21 + 8 \cdot 45 = 2328,$$

on trouve

$$[7] = 24 \cdot 2 \cdot 2328 = 111744.$$

29.

En conséquence des valeurs que nous venons d'établir, il vient (art. 13)

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 3072 + 72 \cdot 18432 + 30 \cdot 62208 + 256 \cdot 30336 \\ &+ 432 \cdot 50304 + 672 \cdot 78912 + 396 \cdot 111744 \\ &= 129976320. \end{aligned}$$

Le nombre des combinaisons circulaires des 28 dés est donc =

$$2^7 \cdot S = 284258211840;$$

et celui des combinaisons rectilignes ou proprement dites =

$$28 \cdot 2^7 \cdot S = 7959229931520.$$

Francfort, le 15 mai 1859.